UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

DONIZETTI KURTZ VON ENDE PEÇANHA

Relações de definição de grau mínimo da álgebra traço de matrizes 3×3

Campinas

2017

Donizetti Kurtz von Ende Peçanha

Relações de definição de grau mínimo da álgebra traço de matrizes 3×3

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lucio Centrone

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Donizetti Kurtz von Ende Peçanha e orientada pelo Prof. Dr. Lucio Centrone.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 131796/2015-1
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3888-318X

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P331r

Peçanha, Donizetti Kurtz von Ende, 1992-
Relações de definição de grau mínimo da álgebra traço de matrizes 3x3 / Donizetti Kurtz von Ende Peçanha. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Lucio Centrone.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebra. 2. Invariantes. 3. Matrizes (Matemática). I. Centrone, Lucio,1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Defining relations of minimal degree of the trace algebra of 3x3 matrices
Palavras-chave em inglês:
Algebra
Invariants
Matrices
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Lucio Centrone [Orientador]
Dimas José Gonçalves
Fabrizio Martino
Data de defesa: 30-05-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 30 de maio de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCIO CENTRONE

Prof(a). Dr(a). FABRIZIO MARTINO

Prof(a). Dr(a). DIMAS JOSÉ GONÇALVES

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Dedico este trabalho à Elci Kurtz von Ende, por ser a primeira a acreditar, por nunca ter desistido e pelos esforços que só poderiam provir do empenho de uma mãe fenomenal.

Agradecimentos

Ao professor Lucio Centrone, meu orientador, pela paciência e por todo conhecimento transmitido.

Aos professores Dimas José Gonçalves e Fabrizio Martino pela disponibilidade em participar da banca e por contribuirem para a melhoria deste trabalho.

À minha família, em especial minha mãe Elci e meus irmãos Donner, Danner e Danuza (por ordem de altura), pois só sou com eles.

Aos funcionários da Unicamp e à CNPq por me proporcionarem condições dignas de estudo.

E finalmente à muitos amigos e professores que já fizeram parte da minha caminhada, em especial àqueles amigos que foram meus professores e aos professores que hoje são meus amigos: Alex S, Altair T, Cristiano S, Davidson N, Denner S, Elíris R, Felipe S, Fernanda S, Frederick A, Gabrielle P, Juliana G, Liara G, Luana M, Lucas N, Marta G, Murilo Z, Pâmela N, Patrícia O, Raul L, Renata Z, Rondinei S, Taís R, Tatiana P e Wender L.

Resumo

A partir dos geradores da álgebra traço de d matrizes genéricas de tamanho n fornecidos por Silvana Abeasis e Marilena Pittaluga, estudaremos o processo realizado por Francesca Benanti e Vesselin Drensky para encontrar as relações de definição de grau mínimo da álgebra traço de matrizes de ordem 3 para d maior ou igual à 3. Queremos destacar que a álgebra traço de d matrizes genéricas de ordem n é isomorfa à álgebra de invariantes da soma direta de d cópias do espaço das matrizes de ordem n, onde o grupo linear age por conjugação simultânea.

Para determinar tais relações veremos que é suficiente determinar as relações de definição de uma álgebra específica gerada por traços de produtos de matrizes genéricas com traço nulo. Estas relações, por sua vez, estão contidas no ideal de aumento de potência 2 da álgebra simétrica do módulo dos geradores da álgebra de matrizes com traço nulo sobre o grupo linear de matrizes de ordem d.

Utilizando a Regra de Littlewood-Richardson iremos decompor a componente homogênea de grau 7, para d maior ou igual a 3, e grau 8, para d=3, desse ideal de aumento e com o auxílio da série de Hilbert das relações de definição da álgebra de matrizes com traço nulo para d=3 conseguiremos informações sobre quantos são os candidatos a geradores dos módulos e em quais módulos nós devemos os procurar.

Assim poderemos encontrar o sistema de geradores de grau mínimo, verificando que o grau é 7 para d maior ou igual a 3 e ainda encontraremos relações de grau 8 para o caso específico de d=3.

Abstract

From the generators of the trace algebra of d generic matrices of order n provided by Silvana Abeasis and Marilena Pittaluga, we will study the process carried out by Francesca Benanti and Vesselin Drensky to find the defining relations of minimal degree of the trace algebra of matrices of order 3 for d greater than or equal to 3. We would like to emphasize that the trace algebra of d generic matrices of order n is isomorphic to the invariants algebra of the direct sum of d copies of the matrices space of order n, where the linear group acts by simultaneous conjugation.

In order to explicitate such relations we shall see that it is sufficient to determine the defining relations of a specific algebra generated by traces of products of generic matrices with null trace. These relations, in turn, are contained in the square of the augmentation ideal of the symmetric algebra of module of the generators of the matrix with null trace acting over the linear group of matrices of order d.

Using the Littlewood-Richardson Rule we will decompose the homogeneous component of degree 7, for d greater than or equal to 3, and grade 8, for d=3, of that augmentation ideal and with the aid of the Hilbert series of the defining relations of matrix algebra with zero trace for d = 3 we will get information on how many candidate to generators of modules and on which modules we should look for them.

Thus we can find the system of generators of minimal degree, verifying that the degree is 7 for d greater or equal to 3 and still we will find relations of degree 8 for the specific case of d = 3.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Como é usual, denota os conjuntos dos números naturais, inteiros, reais e complexos
$\mathbb{K}$	Corpo
$M_{m\times n}(\mathbb{K})$	Grupo das matrizes de ordem $n \times m$ com entradas em $\mathbb{K}$
$M_n(\mathbb{K})$	Grupo das matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	Grupo linear das matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$
S_n	Grupo das permutações
$sign$	Função sinal para permutações
$R[x_1, \dots, x_n]$	Anel de polinômios
$\mathbb{Z}_n$	Anel dos inteiros módulo n
$char$	Característica de um corpo
dim	Dimensão de um espaço vetorial
$GL(V)$	Grupo das tranformações lineares injetores em V
$Hilb$	Série de Hilbert
$\mathbb{K}G$	Álgebra de grupo do grupo G sobre o corpo $\mathbb{K}$
Ker	Núcleo de um homomorfismo
$\omega(R)$	Ideal de aumento de R
$\omega^k(R)$	k-ésima potência do ideal de aumento de R
$\lambda \vdash n$	λ partição de n
$[\lambda]$	Diagrama de Young da partição λ
T_λ	λ-tabela do diagrama de Young de $[\lambda]$
S_λ	Função de Schur
s_k	Polinômio standard
$(\mathbb{K}\langle V_d\rangle)^G$	Álgebra dos polinomios de $\mathbb{K}\langle V_d\rangle$ que são G-invariantes

Ω_k	$\mathbb{K}$-álgebra dos polinômios nas variáveis $\{y_{pq}^{(i)} \mid p, q \in \{1, \ldots, k\}, i \in \mathbb{N}\}$
R_k	Álgebra das matrizes genéricas de ordem k
C_k	Álgebra traço das matrizes genéricas de ordem k

Sumário

Introdução

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica nula, n um inteiro positivo e $\left\{y_{pq}^{(i)} | p, q \in \{1, \ldots, n\}, i \in \mathbb{N}\right\}$ indeterminadas independentes e comutativas sobre $\mathbb{K}$. Então

$$y_i = \left(y_{pq}^{(i)}\right) \in M_n\left(\mathbb{K}[y_{pq}^{(i)}]\right)$$

é chamada de uma matrix genérica de tamanho $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, a $\mathbb{K}$-subálgebra de $M_n\left(\mathbb{K}[y_{pq}^{(i)}]\right)$ gerada por y_i é chamada de álgebra das matrizes genéricas e será denotada por R_n. A álgebra das matrizes genéricas é um objeto básico no estudo dos invariantes de matrizes de ordem n.

Considere C_n o conjunto dos traços de elementos de R_n, que chamaremos de álgebra traço.

Uma importante descrição de C_n mostra que ele é uma álgebra de invariantes de $GL_n(\mathbb{K})$, esta descrição é chamada de Primeiro Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes. Dado que este teorema fornece geradores, uma pergunta natural que surge é como descrever as relações de definição da álgebra C_n, a resposta é dada no Segundo Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes.

O segundo teorema fundamental acaba trazendo muitas questões sobre como traduzir R_n em aspectos combinatórios. Uma das questões mais interessantes é encontrar $N(n)$, o menor inteiro tal que C_n é gerado por elementos de grau $\leqslant N(n)$. A resposta é conhecida para alguns casos, como $N(2) = 3$ e $N(3) = 6$.

Procurar um conjunto mínimo de geradores para a álgebra traço e suas relações de definição é um modo natural de dar continuidade na pesquisa dessa teoria. Algumas restrições se fazem necessárias para facilitar este trabalho, como utilizarmos a subálgebra de C_n gerada pelos produtos de traços das d primeiras matrizes genéricas, a qual denotaremos por C_{nd}. Os geradores e as relações de definição de C_{nd} são explicitadas em apenas alguns casos e, como usualmente na teoria de invariantes, a determinação de geradores e das relações de definição é mais simples se tivermos alguma informação adicional sobre a álgebra de invariantes. Em particular, é muito útil conhecer a série de Hilbert da álgebra.

Uma vez que quadro das informações necessárias para explicitarmos um conjunto mínimo de geradores de C_{nd} e suas relações de definição é completo para o caso em que $n = 3$ e $d \geqslant 3$, foram exibidos os geradores para C_{nd} neste caso, e agora nos concentraremos em exibir as relações de definição de C_{nd}, $n = 3$ e $d \geqslant 3$, com base nos geradores já fornecidos.

1 Ferramentas Iniciais

Neste primeiro momento foram escolhidos alguns conceitos de álgebra, que serão necessários na compreenssão do texto, para serem introduzidos principalmente com o intuito de fixar a notação. Porém, outros foram ignorados, não por serem menos importantes, mas para evitar a prolixidade.

1.1 Grupos e Anéis

Definição 1.1. *Considere G um conjunto com uma operação binária*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1 \cdot g_2 \end{array},$$

que satisfaz as seguintes condições

(i) ***Propriedade Associativa****, sejam $g_1, g_2, g_3 \in G$ quaisquer, então*

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3.$$

(ii) Existe um ***elemento neutro****, isto é, existe $e \in G$ tal que*

$$g \cdot e = g = e \cdot g,$$

para qualquer $g \in G$.

(iii) Todo elemento possui um ***elemento inverso****, isto é, dado $g \in G$ qualquer, existe $h \in G$ tal que*

$$g \cdot h = h \cdot g = e,$$

onde e é um elemento neutro de G.

Então o par do conjunto G com a operação $\cdot$, $(G, \cdot)$, é chamado de ***grupo****. Se além das condições (i), (ii) e (iii) a operação do grupo G também possuir a* ***propriedade comutativa*** *de que para quaisquer $g_1, g_2 \in G$*

(iv) $g_1 . g_2 = g_2 . g_1$,

então $(G, \cdot)$ é chamado de ***grupo abeliano*** *(ou comutativo).*

A demonstração da próxima proposição pode ser encontrada na referência [12], p. 136.

Proposição 1.1. *Seja $(G, \cdot)$ um grupo, então*

(i) O elemento neutro é único.

(ii) O elemento inverso é único.

Exemplo 1.1. *Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então*

(i) Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros munido da adição habitual, então $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano.

(ii) $\mathbb{K}$ com a adição é um exemplo de grupo abeliano.

(iii) O conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, com a operação de soma de matrizes é um grupo abeliano. Quando $m = n$ escreveremos $M_n(\mathbb{K})$ e diremos que as matrizes são quadradas de ordem n.

(iv) O conjunto das matrizes quadradas de ordem n, com entradas em $\mathbb{K}$ e invertíveis, $GL_n(\mathbb{K})$, munido da operação de multiplicação de matrizes é um grupo não comutativo.

(v) Dado $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por S_n o conjunto das bijeções $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Se $\sigma \in S_n$ é tal que $\sigma(i) = \ell_i \in \{1, \ldots, n\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, é usual denotarmos σ da seguinte forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_i & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}.$$

Sejam $\sigma, \tau \in S_n$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ é a operação de composição de funções padrão. Observe que

(a) Para $\sigma, \tau, \rho \in S_n$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\sigma \circ (\tau \circ \rho))(i) = \sigma((\tau \circ \rho)(i)) = \sigma(\tau(\rho(i))) = (\sigma \circ \tau)(\rho(i)) = ((\sigma \circ \tau) \circ \rho)(i).$$

Uma vez que i foi tomado de modo arbitrário, temos que $\sigma \circ (\tau \circ \rho) = (\sigma \circ \tau) \circ \rho$, ou seja, a operação de composição de funções é associativa em S_n.

(b) $id \in S_n$ definida por $id(j) = j$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, é tal que se $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $\sigma \in S_n$ são quaisquer, então

$$(\sigma \circ id)(j) = \sigma(id(j)) = \sigma(j) = id(\sigma(j)) = (id \circ \sigma)(j),$$

logo id é o elemento neutro de S_n.

(c) Tome $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_i & \cdots & \ell_n \end{pmatrix} \in S_n$, defina

$$\sigma^{-1}(\ell_i) = i,$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, *então tomando* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *temos que* $\sigma(j) = \ell_j$ *e existe* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *com* $j = \ell_k = \sigma(k)$, *logo*

$$\begin{aligned}\left(\sigma \circ \sigma^{-1}\right)(j) = \sigma\left(\sigma^{-1}(j)\right) = \ell_{\sigma^{-1}(j)} = \ell_k \\ = j = \sigma^{-1}(\ell_j) = \sigma^{-1}\left(\sigma(j)\right) = \left(\sigma^{-1} \circ \sigma\right)(j).\end{aligned}$$

Como j *é qualquer, temos* $\sigma \circ \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \circ \sigma$, *ou seja,* σ^{-1} *é o elemento inverso de* σ.

Por (a), (b) e (c) podemos concluir que $(S_n, \circ)$ *é um grupo. É usual escrevermos* $\sigma\tau$ *ao invés de* $\sigma \circ \tau$ *para* $\sigma, \tau \in S_n$. *Entenderemos por* ***grupos das permutações*** S_n *o par* $(S_n, \circ)$.

Definição 1.2. *Sejam* G *um grupo e* H *um subconjunto não vazio do conjunto* G.*Temos que* H *é um* ***subgrupo*** *de* G, *denotaremos* $H < G$, *se*

(i) $h_1 \cdot h_2 \in H$, *para quaisquer* $h_1, h_2 \in H$.

(ii) O elemento neutro de G *pertence a* H.

(iii) Se $g \in H$, *então* $g^{-1} \in H$.

Exemplo 1.2. *No grupo* $(\mathbb{Z}, +)$ *tome* $n \in \mathbb{Z}$ *qualquer e defina*

$$n\mathbb{Z} := \{nz, \in \mathbb{Z}\}.$$

Se $m_1, m_2 \in n\mathbb{Z}$ *são quaisquer, então existem* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *tais que* $m_1 = nz_i$, $i \in \{1, 2\}$, *assim*

$$m_1 + m_2 = n(z_1 z_2) \in n\mathbb{Z} \quad e \quad -m_1 = n(-z_1) \in n\mathbb{Z},$$

como $0 = n0 \in n\mathbb{Z}$ *segue que* $n\mathbb{Z}$ *é um conjunto não vazio, que contém o elemento neutro de* $\mathbb{Z}$, *e portanto é um subgrupo de* $\mathbb{Z}$.

Definição 1.3. *Sejam* $(G_1, \bullet)$, $(G_2, \diamond)$ *grupos e* $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ *uma função. Dizemos que* φ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$\varphi(g \bullet h) = \varphi(g) \diamond \varphi(h),$$

para todo $g, h \in G_1$. *Ainda, se* φ, *como função, é bijetora, então diremos que* φ *é um isomorfismo,* G_1 *e* G_2 *são grupos isomorfos e escrevemos* $G_1 \cong G_2$.

A menos que seja mencionado o contrário, daremos preferência à notação de grupos multiplicativa $(G, \cdot)$. Assim quando dissermos grupo G estará subentendido o par $(G, \cdot)$, onde g^{-1} denotará o elemento inverso de $g \in G$ e $\mathbb{1} \in G$ o elemento neutro de G. E ainda, sempre que não houver confusão, simplificaremos a escrita da operação $g \cdot h$ por gh para $g, h \in G$. Há, porém, uma outra notação bastante usual a aditiva $(A, +)$ (usada principalmente quando A é um grupo abeliano) em que o elemento neutro é denotado por 0 e o inverso de $a \in A$ por $-a$.

Definição 1.4. *Sejam G um grupo, $H < G$ e $g \in G$. Definimos a **classe lateral** à esquerda de H em G que contém g como*

$$gH := \{gh|h \in H\}.$$

*De modo análogo podemos definir a classe lateral à direita de H em G que contém g, $Hg := \{hg|h \in H\}$. O elemento g é chamado de representante da classe lateral à esquerda gH (respectivamente para o caso classe lateral à direita Hg). Considere $\{gH|g \in G\}$ o conjunto de todas as classes laterais à esqueda (ou $\{Hg|g \in G\}$ à direita) de H em G. Definimos a **operação induzida** de G em $\{gH|g \in G\}$ como*

$$(g_1H) \odot (g_2H) := (g_1g_2)\, H,$$

para cada $g_1H, g_2H \in G/H$.

Proposição 1.2. *Sejam G um grupo e $H < G$, então*

(i) Para $g \in G$ e $h \in H$ quaisquer temos

$$gH = (gh)\, H.$$

(ii) Para todo $g_1, g_2 \in G$ segue que

$$g_1H = g_2H \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H.$$

(iii) A operação induzida de G em $\{gH|g \in G\}$ está bem definida, ou seja, independe da escolha do representante da classe lateral à esquerda, se, e somente se,

$$ghg^{-1} \in G, \forall g \in G, \forall h \in H.$$

Demonstração. (i) Seja $\bar{g} \in gH$ qualquer, então existe $k \in H$ tal que $\bar{g} = gk$. Uma vez que H é subgrupo de G temos que $h^{-1}k \in H$, logo

$$\bar{g} = gk = gh\left(h^{-1}k\right) \in (gh)\, H.$$

Assim $gH \subset (gh)\, H$. Agora se $\tilde{g} \in (gh)\, H$, então existe $\ell \in H$ tal que $\tilde{g} = gh\ell$. Uma vez que $h\ell \in H$ segue que $\tilde{g} \in gH$. Ou seja $(gh)\, H \subset gH$ e portanto $gH = (gh)\, H$.

(ii) Tome $g_1, g_2 \in G$ quaisquer, então se $g_1H = g_2H$ temos que $g_1 = g_1\mathbb{1} \in g_1H = g_2H$, ou seja, existe $h \in H$ tal que $g_1 = g_2h$, logo $g_2^{-1}g_1 = h \in H$. Agora se $g_2^{-1}g_1 \in H$, então existe $k \in H$ com $g_2^{-1}g_1 = k$, então $g_1 = g_2k$ e pelo que vimos no item anterior segue que

$$g_1H = (g_2k)\, H = g_2H.$$

(iii) Suponha que a operação está bem definida e tome $g \in G$ e $h \in H$ quaisquer. Pelo item (i) sabemos que $g^{-1}H = \left(g^{-1}h\right) H$, então

$$\left(g^{-1}hg\right) H = \left(\left(g^{-1}h\right) H\right) \odot (gH) = \left(g^{-1}H\right) \odot (gH) = \left(g^{-1}g\right) H = \mathbb{1}H,$$

e pelo item (ii) podemos concluir que $g^{-1}hg \in H$. Agora suponha que $g^{-1}hg \in H$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Sejam $g_1, g_2, \bar{g_1}, \bar{g_2} \in G$ tais que $g_iH = \bar{g_i}H$, $i \in \{1, 2\}$, ou seja, como $\bar{g_i}^{-1}g_i \in H$, existe $h_1 \in H$ com $\bar{g_1} = g_1h$, $i \in \{1, 2\}$. Como por hipótese temos $g_2^{-1}h_1g_2 \in H$ e sendo $H < G$ segue que

$$\left(\left(g_2^{-1}h_1g_2\right) h_2\right) \in H \Rightarrow \left(\left(g_2^{-1}\left(g_1^{-1}g_1\right) h_1g_2\right) h_2\right) \in H \Rightarrow \left((g_1g_2)^{-1}\,\bar{g_1}\bar{g_2}\right) \in H,$$

e pelo item (ii) desta Proposição é possível concluir que $(g_1g_2)\, H = (\bar{g_1}\bar{g_2})\, H$, ou seja, pela definição da operação induzida temos

$$(g_1H) \odot (g_2H) = (\bar{g_1}H) \odot (\bar{g_2}H)\,.$$

□

Parte da próxima proposição está demonstrada na Proposição 1.2, para os demais itens consultar [12], p.153.

Proposição 1.3. *Considere G um grupo e $H < G$. As seguintes informações são equivalentes.*

(i) A operação induzida de G em $\{gH|g \in G\}$ é bem definida, ou seja, independe da escolha do representante da classe lateral à esquerda.

(ii) $gH\left(g^{-1}\right) \subseteq H, \forall g \in G$.

(iii) $gH\left(g^{-1}\right) = H, \forall g \in G$.

(iv) $gH = Hg, \forall g \in G$.

Definição 1.5. *Tome G um grupo e H um subgrupo de G. Se uma das equivalências da Proposição 1.3 for válida, então dizemos que H é um **subgrupo normal** de G e escrevemos $H \lhd G$. Neste caso, as classes laterais à esqueda de H são iguais às classes laterais à direita de H e vamos chamá-las apenas de classes laterais de H.*

Exemplo 1.3. *Se G é um grupo abeliano, então todo subgrupo, H, de G será um subgrupo normal, pois dado $gh\left(g^{-1}\right) \in gH\left(g^{-1}\right)$ qualquer, temos*

$$(gh)\left(g^{-1}\right) = (hg)\left(g^{-1}\right) = h\left(g\left(g^{-1}\right)\right) = he = h \in H.$$

O teorema a seguir está provado na referência [12], Teorema V.4.5.

Teorema 1.1. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$, então $\{gH|g \in G\}$ munido da operação induzida de G em $\{gH|g \in G\}$ é um grupo, chamado de* ***grupo quociente*** *e denotado por G/H.*

Definição 1.6. *Para um grupo G defina o seguinte conjunto para cada elemento $h \in G$*

$$[h] := \{ghg^{-1}|g \in G\}.$$

O conjunto $[h]$ é chamado de ***classe de conjugação*** *de G do representante h.*

O grupo das permutações S_n merece um destaque, pois ele será importante para algumas conclusões que virão. Então vamos o detalhar um pouco mais.

Definição 1.7. *Considere uma permutação $\sigma \in S_n$, denotaremos $\sigma = (\ell_1 \ldots \ell_r)$, com $\ell_1, \ldots, \ell_r \in \{1, \ldots, n\}$, se a função σ é tal que*

$$\sigma(\ell_i) = \begin{cases} \ell_{i+1} & \text{se } i < r \\ \ell_1 & \text{se } i = r \end{cases} \quad \text{e } \sigma(j) = j, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{\ell_1, \ldots, \ell_r\}.$$

*A permutação $\sigma = (\ell_1 \ldots \ell_r)$ será chamada de r-**ciclo** e r de comprimento do ciclo. Um 2-ciclo será chamado de* ***transposição****.*

Observação 1.1. *Note que a Definição 1.7 faz sentido apenas quando $r \geqslant 2$, porém, apenas por convenção, estenderemos ela para o caso $r = 1$, assim teremos $\sigma = (\ell_1)$ que coincidirá com o elemento neutro do grupo das permutações.*

Definição 1.8. *Sejam $\sigma \in S_n$ um r-ciclo e $\tau \in S_n$ um s-ciclo. As permutações σ e τ são* ***disjuntas*** *se para cada $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ tivermos que $\sigma(\ell) = \ell$ ou $\tau(\ell) = \ell$. Logo, permutações disjuntas não podem mover um mesmo elemento de $\{1, \ldots, n\}$.*

A próxima proposição pode ser vista em [12], Teorema V.10.5.

Proposição 1.4. *Seja σ uma permutação diferente do elemento neutro, então podemos escrever σ como um produto de ciclos disjuntos. Tal fatoração é única a menos da ordem dos fatores.*

Definição 1.9. *Sejam $\sigma, \tau \in S_n$ escritos da seguinte forma como produto de ciclos disjuntos*

$$\sigma = \left(\ell_1^{(1)} \ldots \ell_{\lambda_1}^{(1)}\right)\left(\ell_1^{(2)} \ldots \ell_{\lambda_2}^{(2)}\right) \cdots \left(\ell_1^{(k)} \ldots \ell_{\lambda_k}^{(k)}\right) \ \text{e}$$

$$\tau = \left(r_1^{(1)} \ldots r_{\mu_1}^{(1)}\right)\left(r_1^{(2)} \ldots r_{\mu_2}^{(2)}\right) \cdots \left(r_1^{(s)} \ldots r_{\mu_s}^{(s)}\right),$$

de tal forma que $\lambda_i \geqslant \lambda_j$ e $\mu_i \geqslant \mu_j$ se $i < j$. Dizemos que σ e τ possuem a ***mesma decomposição cíclica*** *se $k = s$ e $\lambda_i = \mu_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Podemos ver a proposição a seguir demonstrada na referência [12], Proposição V10.8.

Proposição 1.5. *Todo elemento de S_n se decompõe como um produto de transposições. Tal decomposição não é única, mas a paridade na quantidade de fatores da decomposição é sempre a mesma.*

Definição 1.10. *Defina a* ***função sinal*** *sign* $: S_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ *da seguinte maneira, se $\sigma \in S_n$ possui uma quantidade par de fatores na decomposição por transposições, então sign$(\sigma) = 1$. Agora se possuir uma quantidade ímpar, então sign$(\sigma) = -1$.*

Proposição 1.6. *Seja $\sigma \in S_n$, então a classe de conjugação $[\sigma]$ consiste de todas as permutações com a mesma decomposição cíclica que σ.*

Demonstração. Suponha que σ tenha a seguinte decomposição em produto de ciclos disjuntos $\sigma = \left(\ell_1^{(1)} \dots \ell_{\lambda_1}^{(1)}\right)\left(\ell_1^{(2)} \dots \ell_{\lambda_2}^{(2)}\right) \cdots \left(\ell_1^{(k)} \dots \ell_{\lambda_k}^{(k)}\right)$. Primeiramente vejamos que $\sigma \in [\rho]$, onde $\rho = (1 \dots \lambda_1)(\lambda_1 + 1 \dots \lambda_1 + \lambda_2) \cdots (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1 \dots \lambda_1 + \cdots + \lambda_k) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_k$. Defina

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda_1 & \lambda_1 + 1 & \dots & \lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} + i & \dots & \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \\ \ell_1^{(1)} & \dots & \ell_{\lambda_1}^{(1)} & \ell_1^{(2)} & \dots & \ell_i^{(j)} & \dots & \ell_{\lambda_k}^{(k)} \end{pmatrix},$$

e tome $j \in \{1, \dots, k\}$ e $i \in \{1, \dots, \lambda_j\}$ quaisquer. Se $i \neq \lambda_j$, então

$$\tau^{-1}\left(\ell_i^{(j)}\right) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} + i \Rightarrow \rho\left(\tau^{-1}\left(\ell_i^{(j)}\right)\right) = \rho(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} + i) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} + i + 1$$

$$\Rightarrow \tau\left(\rho\left(\tau^{-1}\left(\ell_i^{(j)}\right)\right)\right) = \tau(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} + i + 1) = \ell_{i+1}^{(j)} \Rightarrow \left(\tau \circ \rho \circ \tau^{-1}\right)\left(\ell_i^{(j)}\right) = \ell_{i+1}^{(j)}.$$

Agora, se $i = \lambda_j$, então

$$\tau^{-1}\left(\ell_{\lambda_j}^{(j)}\right) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_j \Rightarrow \rho\left(\tau^{-1}\left(\ell_{\lambda_j}^{(j)}\right)\right) = \rho(\lambda_1 + \cdots + \lambda_j) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} + 1$$

$$\Rightarrow \tau\left(\rho\left(\tau^{-1}\left(\ell_{\lambda_j}^{(j)}\right)\right)\right) = \tau(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} + 1) = \ell_1^{(j)} \Rightarrow \left(\tau \circ \rho \circ \tau^{-1}\right)\left(\ell_{\lambda_j}^{(j)}\right) = \ell_1^{(j)}.$$

Ou seja, temos que $\tau\rho\tau^{-1} = \sigma$, logo $\sigma \in [\rho]$. Observe que se $\alpha \in S_n$ tem a mesma decomposição cíclica que σ, pelo mesmo processo que acabamos de fazer, teremos $\alpha \in [\rho]$, assim sabemos que todas as permutações com mesma decomposição cíclica que σ pertencem à $[\rho]$. Note que se $\beta \in [\rho]$, então existe $\delta \in S_n$ tal que $\beta = \delta\rho\delta^{-1}$. Desta forma

$$\beta = \delta\rho_1\rho_2 \dots \rho_k\delta^{-1} = \delta\rho_1\delta^{-1}\delta\rho_2\delta^{-1} \dots \delta\rho_k\delta^{-1}.$$

Como os ciclos $\delta\rho_i\delta^{-1}$ continuam sendo disjuntos, segue que β tem a mesma decomposição cíclica que σ, o que conclui a proposição. □

Outra estrutura importante é a de anel, que apresentaremos a seguir.

Definição 1.11. *Considere $(R,+)$ um grupo abeliano com uma segunda operação, que por convenção chamaremos de multiplicativa*

$$\begin{array}{rcl} R \times R & \longrightarrow & R \\ (r_1, r_2) & \longmapsto & r_1 \cdot r_2 \end{array},$$

que satisfaz as propriedades

(i) ***Propriedade associativa***

$$r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3,$$

para quaisquer $r_1, r_2, r_3 \in R$.

*(ii) Existe um **elemento neutro multiplicativo** $\mathbb{1} \in R$, tal que*

$$r \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot r = r,$$

para todo $r \in R$.

*(iii) Dados $r_1, r_2, r_3 \in R$ temos a **propriedade distributiva***

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3.$$

$$(r_1 + r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3.$$

*Então $(R,+,\cdot)$ é chamado de **anel**. Se adicionalmente tivermos que para quaisquer $r_1, r_2 \in R$*

$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1,$$

*então dizemos que $(R,+,\cdot)$ é um **anel comutativo**.*

Exemplo 1.4. *(i) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são anéis comutativos com suas somas e produtos habituais.*

(ii) Seja o conjunto das matrizes $M_n(\mathbb{K})$ munido da soma de matrizes $+$ e produto de matrizes $\cdot$, então $(M_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$ é um anel que não é comutativo.

(iii) Seja $(R,+,\cdot)$ um anel. Um polinômio com coeficientes em R e indeterminada x é uma soma finita

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

onde a_i pertence a R para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Detonaremos por $R[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes em R e indeterminada x. Os elementos a_i são chamados de coeficientes do polinômio. Se $a_i = 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, então $f(x)$ é chamado de polinômio constante. Dado $b \in R$, o valor $f(b)$ de $f(x)$ calculado em b é o elemento $a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n \in A$. Caso $f(b) = 0$, então b é chamado *de raiz do polinômio $f(x)$. $R[x]$ será um anel se definirmos para $f(x), g(x) \in R[x]$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ as seguintes operações*

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\ell} c_k x^k, \quad f(x)g(x) = \sum_{r=0}^{s} d_r x^r,$$

onde $c_k = a_k + b_k$ e $d_r = \sum_{t=0}^{r} a_t b_{r-t}$.

Se $(R, +, \cdot)$ é um anel, então o grupo abeliano $(R, +)$ está representado na notação de grupo aditivo. Desta forma podemos manter a simplificação da notação de $a \cdot b$ por ab, com $a, b \in R$, da operação de multiplicação.

Definição 1.12. *Sejam R um anel e I um subgrupo aditivo de R tal que*

$$rx \in I,$$

para todo $r \in I$ e $x \in R$. Neste caso I é chamado de ideal à esquerda de R. Se tivermos $x.r \in I$, $r \in I$, $x \in R$, então I é chamado de ideal à direita de R. No caso de I ser um ideal à esquerda e à direita de R, então I é chamado de ideal bilateral de R, ou simplesmente, ***ideal*** *de R.*

Observação 1.2. *Sejam R um anel e I um ideal de R, como $(R, +)$ é um grupo abeliano, temos que $I \lhd R$ e assim R/I com a operação induzida será um grupo. Também podemos induzir a operação multiplicativa do anel em R/I da seguinte forma*

$$(r_1 + I) \odot (r_2 + I) := (r_1 r_2) + I.$$

Teorema 1.2. *Sejam R um anel e I um ideal bilateral de R. Neste caso R/I, com as operações induzidas, será um anel, chamado de* ***anel quociente****.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que a operação induzida está bem definida, sejam $r_1, r_2, \bar{r_1}, \bar{r_2} \in R$ tais que

$$r_j + I = \bar{r_j} + I, j \in \{1, 2\}.$$

Logo existe $b_j \in I$ tal que $\bar{r_j} = r_j + b_j$. Sendo I um ideal temos que $r_1 b_2$, $b_1 r_2$ e $b_1 b_2$ pertencem a I, desta forma

$$\begin{aligned}(\bar{r_1} + I) \odot (\bar{r_2} + I) = \bar{r_1}\bar{r_2} + I &= (r_1 r_2 + r_1 b_2 + b_1 r_2 + b_1 b_2) + I \\ &= r_1 r_2 + I = (r_1 + I) \odot (r_2 + I).\end{aligned}$$

Assim a operação independe da escolha do representante. Sabendo que R/I é um grupo abeliano, vejamos as outras condições

(i) Tome $r_1, r_2, r_3 \in R$, então

$$(r_1 + I) \odot ((r_2 + I) \odot (r_3 + I)) = (r_1 + I) \odot (r_2 r_3 + I) = ((r_1(r_2 r_3)) + I) =$$
$$(((r_1 r_2) r_3) + I) = (r_1 r_2 + I) \odot (r_3 + I) = ((r_1 + I) \odot (r_2 + I)) \odot (r_3 + I).$$

Logo a propriedade associativa é válida.

(ii) Defina $\mathbb{1}_{\frac{R}{I}} = I = \mathbb{1} + I$, onde $\mathbb{1}$ é o elemento neutro multiplicativo de R. Para $r \in R$ qualquer, temos

$$(r + I) \odot \mathbb{1}_{\frac{R}{I}} = r\mathbb{1} + I = r + I,$$
$$\mathbb{1}_{\frac{R}{I}} \odot (r + I) = \mathbb{1}r + I = r + I.$$

Logo $\mathbb{1}_{\frac{R}{I}}$ é o elemento neutro de R/I.

(iii) Sejam $r_1, r_2, r_3 \in R$, assim

$$(r_1 + I) \odot ((r_2 + I) \oplus (r_3 + I)) = (r_1 + I) \odot ((r_2 + r_3) + I) = r_1(r_2 + r_3) + I =$$
$$(r_1 r_2 + r_1 r_3) + I = (r_1 r_2 + I) \oplus (r_1 r_3 + I)$$
$$= ((r_1 + I) \odot (r_2 + I)) \oplus ((r_1 + I) \odot (r_3 + I)).$$

A verificação de

$$((r_1 + I) \oplus (r_2 + I)) \odot (r_3 + I) = ((r_1 + I) \odot (r_3 + I)) \oplus ((r_2 + I) \odot (r_3 + I)),$$

é análoga a anterior.

Por (i), (ii) e (iii) podemos concluir que $\dfrac{R}{I}$ é um anel. □

Exemplo 1.5. *Tome $n \in \mathbb{Z}$ qualquer, logo $n\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$ (e é normal, uma vez que $\mathbb{Z}$ é abeliano). Agora para todo $nz \in n\mathbb{Z}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$ temos*

$$k(nz) = (nz)k = n(zk) \in n\mathbb{Z},$$

assim $n\mathbb{Z}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$. Denotaremos por $\mathbb{Z}_n$ o anel quociente $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ e o elemento $m + n\mathbb{Z}$ por $\overline{m}$, assim

$$\overline{z} + \overline{k} = (z + k) + n\mathbb{Z} = \overline{z + k} \text{ e } \overline{z}\overline{k} = zk + n\mathbb{Z} = \overline{zk}.$$

Definição 1.13. *Sejam $(R_1, +, .)$ e $(R_2, \diamond, \star)$ anéis e $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ um homomorfismo de grupos tal que*

$$\varphi(a.b) = \varphi(a) \star \varphi(b), \forall a, b \in R_1.$$

$$\varphi(\mathbb{1}_{R_1}) = \mathbb{1}_{R_2}.$$

*Então φ é chamado de **homomorfismo de anéis**.*

1.2 Corpos e Espaços Vetoriais

Definição 1.14. *Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um anel comutativo satisfazendo a condição de que para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existe um elemento inverso $y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = \mathbb{1}$. Nestas condições dizemos que $(\mathbb{K}, +, .)$ é um **corpo**.*

Observação 1.3. *O elemento inverso de um corpo é único.*

Exemplo 1.6. *(i) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as operações usuais de soma e produto são corpos.*

(ii) Tome p um número primo, então para $\overline{m} \in \mathbb{Z}_p$, com $\overline{m} \neq \overline{0}$, ou seja $m \notin p\mathbb{Z}$, assim temos que m e p são primos entre si, então existem inteiros x, y tais que

$$mx + py = 1 \Rightarrow mx = 1 + p(-y),$$

ou seja $mx \in \overline{1}$, o que nos leva a

$$\overline{m}\overline{x} = \overline{mx} = \overline{1}.$$

Assim todo elemento não nulo de $\mathbb{Z}_p$ possui um elemento inverso, portanto $\mathbb{Z}_p$ é um corpo.

(iii) Dado $p > 2$ um número primo, considere o conjunto

$$\mathbb{Z}_p^* := \mathbb{Z}_p \setminus \{\overline{0}\},$$

como cada elemento de $\mathbb{Z}_p^*$ possui um inverso multiplicativo, temos que $\mathbb{Z}_p^*$ munido da multiplicação é um grupo. É usual tomar os representantes

$$\mathbb{Z}_p^* = \left\{ \overline{\frac{1-p}{2}}, \overline{\frac{1-p}{2} + 1}, \ldots, -\overline{2}, -\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{\frac{p-1}{2} - 1}, \overline{\frac{p-1}{2}} \right\},$$

ou seja $\mathbb{Z}_3^* = \{-\overline{1}, \overline{1}\}$, $\mathbb{Z}_5^* = \{-\overline{2}, -\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Definição 1.15. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, se existe um menor inteiro positivo n tal que para qualquer $a \in \mathbb{K}$ temos*

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} = 0,$$

então diremos que $\mathbb{K}$ possui característica n ($char(\mathbb{K}) = n$), caso tal inteiro não exista diremos que $\mathbb{K}$ possui característica nula ($char(\mathbb{K}) = 0$).

Exemplo 1.7. *(i) $char(\mathbb{C}) = char(\mathbb{R}) = 0$.*

(ii) Para um primo p, temos que se $\overline{m} \in \mathbb{Z}_p$, então

$$\overline{m} + \cdots + \overline{m} = \overline{m + \cdots + m} = \overline{pm} = \overline{0}.$$

Logo $char(\mathbb{Z}_p) = p$.

Definição 1.16. *Um corpo $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado se todo polinômio de $\mathbb{K}[x]$, não constante, possuir todas as suas raízes em $\mathbb{K}$.*

Exemplo 1.8.

(i) O corpo $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, ver [15] Teorema 10.3.25.

(ii) O corpo $\mathbb{R}$ não é algebricamente fechado, pois $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$, mas a raiz i não pertence a $\mathbb{R}$.

Definição 1.17. *Sejam $(V, +)$ um grupo abeliano, $\mathbb{K}$ um corpo e uma operação*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, v) & \longmapsto & \alpha v \end{array},$$

que satisfaz

(i) $(\alpha\beta)\, v = \alpha\,(\beta v)$ *, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$.*

(ii) $\mathbb{1} v = v$*, para todo $v \in V$.*

(iii) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$*, com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v_1, v_2 \in V$ arbitrários.*

(iv) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$*, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$.*

Nestas condições dizemos que V é um ***espaço vetorial*** *sobre $\mathbb{K}$, ou simplesmente um $\mathbb{K}$-espaço.*

Exemplo 1.9. *(i) $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

(ii) $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}}$ *é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*

Definição 1.18. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço e considere o conjunto $\mathcal{B} = \{v_i | i \in \mathcal{I}\} \subset V$ com as seguintes propriedades*

(i) Dado $v \in V$ existem $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para cada $i \in \mathcal{I}$, que são não nulos apenas para uma quantidade finita de índices, tais que

$$v = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i v_i.$$

Isto é, V é ***gerado*** *por $\mathcal{B}$.*

(ii) Dados n um inteiro positivo e $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset \mathcal{I}$, a equação

$$\alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_n v_{i_n} = 0,$$

possui a única solução trivial $\alpha_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, isto é, qualquer subconjunto finito de $\mathcal{B}$ é ***linearmente independente****.*

*Nestas condições dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base** para o espaço vetorial V.*

A demonstração da proposição a seguir está feita em [15], Teorema 10.1.29.

Proposição 1.7. *Suponha que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ sejam bases para o $\mathbb{K}$-espaço V, então $n = m$.*

Definição 1.19. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço e $\mathcal{B} = \{v_i | i \in \mathcal{I}\}$ uma base de V. Se a cardinalidade de $\mathcal{I}$ é finita e igual a n, então diremos que V é um espaço de dimensão n (n-dimensional) e escrevemos $dim(V) = n$. Caso $\mathcal{I}$ tenha cardinalidade infinita diremos que V é um espaço de dimensão infinita e escrevemos $dim(V) = \infty$.*

Observação 1.4. *Por convenção, diremos que o espaço vetorial que possui apenas o elemento neutro tem dimensão 0.*

Exemplo 1.10. *(i) $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-espaço se definirmos*

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix},$$

e possui $dim\left(M_{m\times n}(\mathbb{K})\right) = mn$. Para verificar isso basta observar que $\{e_{ij} | i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$, onde $e_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é tal que possui $\mathbb{1}$ na entrada (i, j) e 0 nas demais é uma base para $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(ii) $\mathbb{K}[x]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ se definirmos

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i x^i,$$

e tem dimensão infinita, pois $\{x^i | i \in \mathbb{N}\}$ é uma base.

Definição 1.20. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subgrupo de V. Se*

$$\alpha w \in W,$$

*para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in W$, então dizemos que W é um **subespaço vetorial** de V.*

Proposição 1.8. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço e W um subespaço de V. Em $\dfrac{V}{W}$ defina*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \dfrac{V}{W} & \longrightarrow & \dfrac{V}{W} \\ (\alpha, v + W) & \mapsto & (\alpha v) + W \end{array}.$$

*Então $\dfrac{V}{W}$ é um espaço vetorial que chamaremos de **espaço quociente**.*

Definição 1.21. *Sejam V e U espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow U$ um homomorfismo de grupos tal que*

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w),$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$. Então T é chamado de ***transformação linear*** *(ou homomorfismo de espaços vetoriais).*

Exemplo 1.11. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Defina o seguinte conjunto*

$$GL(V) := \{T : V \longrightarrow V | \ T \text{ é uma transformação linear bijetora}\}.$$

Com a operação de composição de funções podemos ver que $GL(V)$ é um grupo. Dado $T \in GL(V)$ temos que para cada $j \in \{i, \ldots, n\}$ existem $a_{1j}, \ldots, a_{nj} \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(v_j) = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n.$$

Então podemos definir a matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Se $S \in GL(V)$ é tal que $[S] = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$, então

$$\begin{gathered} (T \circ S)(v_j) = T(S(v_j)) = T(b_{1j}v_1 + \cdots + b_{nj}v_n) = b_{1j}T(v_1) + \cdots + b_{nj}T(v_n) = \\ b_{1j}(a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n) + \cdots + b_{nj}(a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n) = \\ (b_{1j}a_{11} + \cdots + b_{nj}a_{1n})v_1 + \cdots + (b_{1j}a_{n1} + \cdots + b_{nj}a_{nn})v_n. \end{gathered}$$

Assim

$$\begin{aligned} [T \circ S] &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + \cdots + b_{n1}a_{1n} & \ldots & b_{1n}a_{11} + \cdots + b_{nn}a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11}a_{n1} + \cdots + b_{n1}a_{nn} & \ldots & b_{1n}a_{n1} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} = [T][S]. \end{aligned}$$

Ou seja, $[T \circ S] = [T][S]$. Como $GL(V)$ é um grupo, existe $T^{-1} \in GL(V)$ tal que $T \circ T^{-1} = id = T^{-1} \circ T$, onde id é a transformação identidade (que é o elemento neutro de $GL(V)$). Pelo que vimos anteriormente e do fato de que $[id] = Id_n$ (matriz identidade $n \times n$), temos

$$[T]\left[T^{-1}\right] = \left[T \circ T^{-1}\right] = [id] = \left[T^{-1} \circ T\right] = \left[T^{-1}\right][T].$$

Logo $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$*, portanto* $[T] \in GL_n(\mathbb{K})$*. Defina a função* $\varphi : GL(V) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ *por* $\varphi(T) = [T]$*,* $T \in GL(V)$*. Pelo que acabamos de ver* φ *está bem definida e é um homomorfismo de grupos. Se* $T, S \in GL(V)$ *são tais que* $\varphi(T) = \varphi(S)$*, então* $[T] = [S]$*, logo* $T(v_j) = S(v_j)$ *para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, consequentemente* $T = S$ *e temos* φ *injetiva. Agora se tomamos* $M = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$ *defina* $T_M(v_j) = c_{1j}v_1 + \cdots + c_{nj}v_n$*, assim* $T_M \in GL(V)$ *e* $\varphi(T_M) = M$*, ou seja,* φ *é sobrejetora e portanto um isomorfismo. Concluímos então que*

$$GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K}).$$

Definição 1.22. *Um* $\mathbb{K}$*-espaço* V *é uma* ***soma direta*** *dos seus subespaços* $V_1, \ldots, V_n$ *se todo vetor* $v \in V$ *puder ser representado de maneira única na forma* $\sum_{i=1}^{n} v_i$*, onde* $v_i \in V_i$*. Quando esta condição é satisfeita escrevemos* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$*.*

Exemplo 1.12. *Se* V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *é uma base para* V*, defina* $V_i = \mathbb{K}v_i = \{\alpha v_i | \alpha \in \mathbb{K}\}$*, então*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = (\mathbb{K}v_1) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{K}v_n).$$

Definição 1.23. *Sejam* $V, V_1, \ldots, V_n$ $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais e*

$$T : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V,$$

uma função. Dizemos que T *é* ***multilinear*** *se* T *for linear em cada uma das suas entradas.*

Definição 1.24. *O espaço vetorial* V *é* ***graduado*** *se ele for a soma direta de subespaços* $V^{(n)}$*,* $n \geqslant 0$*, isto é*

$$V = \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{(n)} = \sum_{n \geqslant 0} V^{(n)}.$$

Os subespaços $V^{(n)}$ *são chamados de componentes homogêneas de grau* n *de* V *e os elementos que pertencem a esta componente são chamados de elementos homogêneos de grau* n*. Similarmente, introduzimos a* ***multigraduação*** *em* V *se*

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_i \geqslant 0} V^{(n_1, \ldots, n_m)},$$

e chamamos $V^{(n_1, \ldots, n_m)}$ *de componente multi-homogênea de* V *de multigrau* $(n_1, \ldots, n_m)$ *e os elementos que pertencem a esta componente são chamados de elementos homogêneos de multigrau* $(n_1, \ldots, n_m)$*. O subespaço* W *do espaço vetorial graduado* $V = \sum_{n \geqslant 0} V^{(n)}$ *é um subespaço graduado se* $W = \sum_{n \geqslant 0} (W \cap V^{(n)})$*. Neste caso, o espaço quociente* $\dfrac{V}{W}$ *pode também ser naturalmente graduado (e diremos que* $\dfrac{V}{W}$ *herda a graduação de* V*).*

Definição 1.25. *Seja* $V = \sum_{n\geqslant 0} V^{(n)}$ *um espaço vetorial graduado tal que* $dim\left(V^{(n)}\right) < \infty$ *para todo* n*. A série de potências*

$$Hilb\,(V,t) = \sum_{n\geqslant 0} dim\left(V^{(n)}\right) t^n,$$

é chamada de ***série de Hilbert*** *de* V*. Para uma função* $f(t)$*, faremos a convenção usual que* $Hilb\,(V,t) = f(t)$ *se a série* $Hilb\,(V,t)$ *converge em alguma vizinhança de* 0 *e as funções* $Hilb\,(V,t)$ *e* $f(t)$ *são iguais ali. De modo similar, se o espaço vetorial*

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_i\geqslant 0} V^{(n_1,\ldots,n_m)},$$

é multigraduado, então a série de Hilbert de V *é*

$$Hilb\,(V,t_1,\ldots,t_m) = \sum_{n_i\geqslant 0} dim\left(V^{(n_1,\ldots,n_m)}\right) t_1^{n_1}\ldots t_m^{n_m}.$$

Para finalizar esta seção vejamos um conceito que será bastante usado neste trabalho. Os resultados que serão apresentados a seguir podem ser consultados na referência [18]. Sejam $V_1,\ldots,V_n$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $\delta : V_1\times\cdots\times V_n \longrightarrow \mathbb{K}$ tem suporte finito se δ for não nula apenas para uma quantidade finita de pontos. Neste caso, defina o conjunto

$$\mathcal{M} := \{\delta : V_1\times\cdots\times V_n \longrightarrow \mathbb{K} |\ \delta \text{ possui suporte finito}\}.$$

Para $\delta,\gamma\in\mathcal{M}$ e $a\in\mathbb{K}$ defina

$$(\delta+\gamma)(v_1,\ldots,v_n) = \delta(v_1,\ldots,v_n)+\gamma(v_1,\ldots,v_n) \quad \text{e} \quad (a\delta)(v_1,\ldots,v_n) = a\delta(v_1,\ldots,v_n).$$

Então $\mathcal{M}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dada uma n-upla $(u_1,\ldots,u_n)\in V_1\times\cdots\times V_n$ considere

$$\delta_{(u_1,\ldots,u_n)}(v_1,\ldots,v_n) = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{se } (v_1,\ldots,v_n) = (u_1,\ldots,u_n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Logo $\{\delta_{(u_1,\ldots,u_n)} |\ (u_1,\ldots,u_n)\in V_1\times\cdots\times V_n\}$ forma uma base para $\mathcal{M}$. Considere $\mathcal{M}_0$ o subespaço de $\mathcal{M}$ gerado por vetores da forma

$$\delta_{(u_1,\ldots,u_j'+u_j'',\ldots,u_n)} - \delta_{(u_1,\ldots,u_j',\ldots,u_n)} - \delta_{(u_1,\ldots,u_j'',\ldots,u_n)} \text{ e } \delta_{(u_1,\ldots,au_j,\ldots,u_n)} - a\delta_{(u_1,\ldots,u_n)},$$

com $a\in\mathbb{K}$. Definimos o **produto tensorial** de $V_1,\ldots,V_n$ por

$$V_1\otimes\cdots\otimes V_n = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_0}.$$

Temos também a seguinte função

$$\begin{array}{rccl} \otimes : & V_1\times\cdots\times V_n & \longrightarrow & V_1\otimes\cdots\otimes V_n \\ & (v_1,\ldots,v_n) & \mapsto & v_1\otimes\cdots\otimes v_n := \delta_{(v_1,\ldots,v_n)} + \mathcal{M}_0 \end{array}.$$

Teorema 1.3. *Sejam $V_1, \ldots, V_n$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ a função definida anteriormente.*

(i) A função $\otimes$ é uma transformação multilinear.

(ii) A transformação multilinear $\otimes$ é universal da seguinte maneira: Para todo $\mathbb{K}$-espaço V e qualquer transformação multilinear $S : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V$ existe uma transformação linear $T : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow V$ tal que

$$S(v_1, \ldots, v_n) = T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$.

Proposição 1.9. *Sejam $V_1, \ldots, V_n$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, então*

(i) $dim\,(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = dim\,(V_1) \ldots dim\,(V_n)$.

(ii) Se $\{v_1^{(j)}, \ldots, v_{m_j}^{(j)}\}$ é uma base para V_j, então

$$\{v_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{(n)} |\, (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, n_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, m_n\}\},$$

forma uma base para $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então $V^{\otimes q}$ denotará a **q-ésima potência tensorial** $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q\text{-vezes}}$. Defina $\mathcal{M}_1$ como sendo o espaço vetorial gerado por

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_q - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)},$$

onde $v_1, \ldots, v_q \in V$ e $\sigma \in S_q$. Então a **q-ésima potência tensorial simétrica** $S^q(V) = V^{\otimes_s q} = \underbrace{V \otimes_s \cdots \otimes_s V}_{q\text{-vezes}}$ é

$$S^q(V) = \frac{V^{\otimes q}}{\mathcal{M}_1}.$$

Proposição 1.10. *Para um $\mathbb{K}$-espaço V com $dim(V) = n$ e q um inteiro positivo temos*

$$dim\left(V^{\otimes_s q}\right) = \binom{n+q-1}{q}.$$

Definição 1.26. *Dado V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, a* ***álgebra simétrica*** *de V é*

$$S(V) = \sum_{q \geqslant 0} S^q(V),$$

onde $S^0(V) = \mathbb{K}$ e $S^1(V) = V$.

1.3 Álgebras

Definição 1.27. *Sejam R um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $*$ uma operação binária entre os elementos de R (isto é, uma função $* : R \times R \longrightarrow R$) que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $a, b, c \in R$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:*

(i) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Nestas condições dizemos que R, munido da operação $*$, é uma ***álgebra*** *sobre o corpo $\mathbb{K}$ (ou uma $\mathbb{K}$-álgebra).*

Sempre que possível omitiremos o sinal de operação da álgebra e escreveremos ab ao invés de $a * b$.

Definição 1.28. *Seja R uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $a, b, c \in R$ quaisquer.*

(i) *R é* ***associativa*** *se $(a * b) * c = a * (b * c)$,*

(ii) *R é* ***comutativa*** *se $a * b = b * a$,*

(iii) *R é* ***unitária*** *se R possuir um elemento, digamos $e \in R$, tal que $r * e = e * r = r$, para todo $r \in R$. Neste caso e é chamado de unidade de R.*

Observação 1.5. *Se R é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ que possui, como espaço vetorial, a base $\{r_i | i \in I\}$, então para calcularmos a operação que torna R uma álgebra em qualquer elemento de R basta que tenhamos a definido nos elementos da base. Ou seja, é suficiente que conheçamos os escalares $\alpha_{i,j}^{(k)} \in \mathbb{K}$, que são não nulos apenas para uma quantidade finita de $k \in I$, tais que*

$$r_i r_j = \sum_{k \in I} \alpha_{i,j}^{(k)} r_k,$$

para cada $i, j \in I$.

Exemplo 1.13. *(i) Dado um corpo $\mathbb{K}$, o conjunto dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[x]$, munido da soma e produto entre polinômios já apresentadas é uma álgebra. Para indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ definimos recursivamente*

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = (\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}])[x_n].$$

(ii) Sejam G um grupo e $\mathbb{K}$ um corpo. Defina $\mathbb{K}G$ como o espaço vetorial que tem como base os elementos do grupo G, isto é, se $v \in \mathbb{K}G$. então para cada $g \in G$ existe $\alpha_g \in \mathbb{K}$

tal que o conjunto $\{\alpha_g | g \in G\}$ possui apenas uma quantidade finita de elementos não nulos e

$$v = \sum_{g \in G} \alpha_g g.$$

Neste espaço vetorial, para $g, h \in G$, definimos

$$g * h = gh.$$

*Logo a operação em $\mathbb{K}G$ está bem definida pelo que vimos na Observação 1.5. Então $\mathbb{K}G$ possuirá uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra e a chamaremos de **álgebra de grupo**.*

Definição 1.29. *Seja R uma álgebra sobre $\mathbb{K}$.*

*(i) Se S é um subconjunto de R tal que é um subespaço vetorial de R e para todo $a, b \in S$ temos que $ab \in S$, então dizemos que S é uma **subálgebra** de R.*

(ii) Seja I uma subálgebra de R, dizemos que I é um ideal à esquerda de R se para todo $a \in R$ e $x \in I$ temos

$$xa \in I.$$

*Analogamente definimos ideal à direita e se uma subálgebra de R é simultanemente um ideal à esquerda e à direita, dizemos apenas que é um **ideal** de R.*

Definição 1.30. *Considere R_1 e R_2 $\mathbb{K}$-álgebras e $\phi : R_1 \longrightarrow R_2$ um homomorfismo entre espaços vetoriais.*

(i) Se para $a, b \in R_1$ quaisquer tivermos

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$

*então ϕ será chamado de **homomorfismo entre álgebras**.*

*(ii) Se ϕ for um homomorfismo de álgebras bijetor, então ϕ é chamado de **isomorfismo**.*

*(iii) Se ϕ for um homomorfismo de álgebras e $R_1 = R_2$, então ϕ é chamado de **automorfismo**.*

Definição 1.31. *Dadas uma $\mathbb{K}$-álgebra R e um ideal bilateral J de R, o espaço vetorial quociente $\dfrac{R}{J}$ será chamado de **álgebra quociente** se o munirmos com a operação*

$$(a + J) * (b + J) = a * b + J,$$

para $a, b \in R$, onde $*$ é a operação de R como na Definição 1.27.

Teorema 1.4. *A álgebra quociente da Definição 1.31 respeita as condições da Definição 1.27.*

Teorema 1.5 (Primeiro Teorema de Isomorfismos)**.** *Seja $\phi : R_1 \longrightarrow R_2$ um homomorfismo entre álgebras. Então o núcleo de ϕ*

$$Ker(\phi) = \{r \in R_1 | \phi(r) = 0\}$$

é um ideal bilateral de R_1 e a álgebra quociente $\dfrac{R_1}{Ker(\phi)}$ é isomorfa a imagem $Im(\phi) = \{\phi(r) | r \in R_1\}$ de ϕ.

Proposição 1.11. *Sejam $R_1, \ldots, R_n$ $\mathbb{K}$-álgebras. Defina no espaço vetorial $R_1 \otimes \cdots \otimes R_n$ a operação*

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) * (b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = (a_1 b_1) \otimes \cdots \otimes (a_n b_n),$$

para $a_i, b_i \in R_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então com esta operação $R_1 \otimes \cdots \otimes R_n$ terá uma estrutura de álgebra.

Definição 1.32. *Uma $\mathbb{K}$-álgebra F é **gerada** por um conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ se cada elemento de F pode ser escrito como combinação linear de produtos de elementos de X.*

Definição 1.33. *Seja $\mathfrak{B}$ uma classe de álgebras e tome $F \in \mathfrak{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é chamada de **álgebra livre** na classe $\mathfrak{B}$, livremente gerada pelo conjunto X, se para qualquer álgebra $R \in \mathfrak{B}$, para qualquer função $X \longrightarrow R$ podemos estende-lá para um homomorfismo $F \longrightarrow R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada de **posto** de F.*

Proposição 1.12. *Para todo conjunto X a álgebra $\mathbb{K}\langle X \rangle$ com base no conjunto de todas as palavras*

$$x_{i_1} \ldots x_{i_n}, x_{i_j} \in X, n \in \mathbb{N}$$

e multiplicação definida pela concatenação

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_n})(x_{j_1} \ldots x_{j_m}) = x_{i_1} \ldots x_{i_n} x_{j_1} \ldots x_{j_m},$$

é livre na classe de todas as álgebras unitárias e associativas. Se considerarmos o subespaço de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado por todas as palavras de comprimento $\geqslant 1$, obtemos uma álgebra livre não-unitária e associativa, que é livre na classe de todas as álgebras associativas.

Demonstração. Sejam R uma álgebra unitária e associativa e $\phi : X \longrightarrow R$ uma função. Defina

$$\varphi(\sum \alpha_i x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = \sum \alpha_i \phi(x_{i_1}) \ldots \phi(x_{i_n}), \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

φ é um homomorfismo entre espaços vetoriais, pois está definida nos elementos da base. Verifiquemos que ela satisfaz a condição (1.30) da Definição 1.30:

$$\varphi\left(\left(\sum \alpha_i x_{i_1} \ldots x_{i_n}\right)\left(\sum \beta_j x_{j_1} \ldots x_{j_m}\right)\right) = \varphi\left(\sum \alpha_i \beta_j x_{i_1} \ldots x_{i_n} x_{j_1} \ldots x_{j_m}\right) =$$

$$\sum \alpha_i \beta_j \phi(x_{i_1}) \ldots \phi(x_{i_n}) \phi(x_{j_1}) \ldots \phi(x_{j_m}) = \left(\sum \alpha_i \phi(x_{i_1}) \ldots \phi(x_{i_n})\right)\left(\sum \beta_j \phi(x_{j_1}) \ldots \phi(x_{j_m})\right)$$

$$= \varphi\left(\sum \alpha_i x_{i_1} \dots x_{i_n}\right) \varphi\left(\sum \beta_j x_{j_1} \dots x_{j_m}\right).$$

Logo $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma álgebra livre. □

Observação 1.6. *Se V_n é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base $\{x_1, \dots, x_n\}$, então $\mathbb{K}\langle V_n\rangle$ denotará a álgebra $\mathbb{K}\langle\{x_1, \dots, x_n\}\rangle$.*

Corolário 1.1. *Seja R uma álgebra gerada pelo conjunto $\{r_1, \dots, r_n\}$, então existe um ideal bilateral J de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que R é isomorfo à álgebra quociente $\dfrac{\mathbb{K}\langle X\rangle}{J}$.*

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, defina $\phi : X \longrightarrow R$ por $\phi(x_i) = r_i$, para cada $i \in \{1, \dots n\}$. Como acabamos de ver existe um homomorfismo $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow R$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo (Teorema 1.5) basta tomar $J = Ker(\varphi)$ e temos o resultado. □

Definição 1.34. *Considere R uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ tal que $R \cong \dfrac{\mathbb{K}\langle X\rangle}{J}$ como no Corolário 1.1. Se U é um conjunto de geradores de J, então chamaremos U de conjunto de **relações de definição** de R.*

Definição 1.35. *Seja R uma álgebra, o **comutador de Lie** de tamanho n, $n \geqslant 2$, é definido recursivamente por*

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1,$$

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n], n \geqslant 3.$$

Definição 1.36. *O operador linear δ do espaço vetorial R é uma **derivação** se*

$$\delta(r_1r_2) = \delta(r_1)r_2 + r_1\delta(r_2), \forall r_1, r_2 \in R.$$

*Diremos ainda que uma derivação é **localmente nilpotente** se para cada $r \in R$ existir um inteiro não negativo n tal que $\delta^n(r) = 0$.*

Definição 1.37. *Tome R uma $\mathbb{K}$-álgebra gerada por elementos homogêneos de grau positivo. Então dado $r \in R$ temos que existem $r_1, \dots, r_n \in R$ tais que $r = \sum \alpha_{(m_1, \dots, m_n)} r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n}$, com $\alpha_{(m_1, \dots, m_n)} \in \mathbb{K}$. Defina o **homomorfismo de aumento** $\varepsilon : R \longrightarrow \mathbb{K}$ por $\varepsilon(r) = \alpha_{(0, \dots, 0)}$. Chamaremos $\omega(R) := Ker(\varepsilon)$ de **ideal de aumento** de R. Note que $\omega(R)$ consiste dos elementos de R cujo termo multi-homogêneo constante (de multigrau $(0, \dots, 0)$) é nulo. Definiremos a k-ésima potência do ideal de aumento $\omega(R)$ recursivamente, para $k \geqslant 2$, da seguinte forma*

$$\omega^k(R) = \omega^{k-1}(R)\omega(R).$$

Proposição 1.13. *Seja R uma $\mathbb{K}$-álgebra gerada por elementos homogêneos de grau positivo.*

(i) A k-ésima potência do ideal de aumento $\omega(R)$ consiste dos elementos de R cuja constante do multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$, com $m_1 + \cdots + m_n < k$, é nula (ou seja $\alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} = 0$).

(ii) Os elementos homogêneos $r_1, \ldots, r_n \in R$ formam um sistema mínimo de geradores de R se, e somente se, eles formam uma base para o espaço vetorial $\omega(R)$ módulo $\omega^2(R)$.

Demonstração. Considere $r_1, \ldots, r_n \in R$ elementos homogêneos de grau positivo que geram R e tome $r \in R$ tal que

$$r = \sum \alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n},$$

onde $\alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} \in \mathbb{K}$ para toda n-upla de inteiros não negativos $(m_1, \ldots, m_n)$.

(i) Suponha que $r \in \omega^k(R)$ e verifiquemos pelo processo de indução finita que $\alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} = 0$ para $0 \leqslant m_1 + \cdots + m_n < k$. Se $k = 1$, então $0 \leqslant m_1 + \cdots + m_n < 1$ implica que $(m_1, \ldots, m_n) = (0, \ldots, 0)$. Pela definição do ideal de aumento sabemos que $\alpha_{(0,\ldots,0)} = 0$, logo $\omega^1(R) = \omega(R)$ consiste dos elementos de R cuja constante de multigrau $(0, \ldots, 0)$ é nula. Suponha que para $k-1$ a hipótese do item (i) seja válida, ou seja, $\omega^{k-1}(R)$ consiste dos elementos de R cuja constante de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$, com $0 \leqslant m_1 + \cdots + m_n < k-1$, é nula. Como $r \in \omega^k(R) = \omega^{k-1}(R)\omega(R)$ existem $u \in \omega^{k-1}(R)$ e $v \in \omega(R)$, $u = \sum \beta_{(i_1,\ldots,i_n)} r_1^{i_1} \ldots r_n^{i_n}$ e $v = \sum \gamma_{(j_1,\ldots,j_n)} r_1^{j_1} \ldots r_n^{j_n}$, tais que $r = uv$. Pela definição de produto sabemos que para $(m_1, \ldots, m_n)$ fixo

$$\alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} = \sum \beta_{(i_1,\ldots,i_n)} \gamma_{(j_1,\ldots,j_n)},$$

onde a soma percorre todas as n-uplas de inteiros não negativos $(i_1, \ldots, i_n)$ e $(j_1, \ldots, j_n)$ tais que $i_1 + \cdots + i_n + j_1 + \cdots + j_n = m_1 + \cdots + m_n$. Para $m_1 + \cdots + m_n < k$ temos as possibilidades: (a) $j_1 + \cdots + j_n < 1$, então $\beta_{(i_1,\ldots,i_n)} \gamma_{(j_1,\ldots,j_n)} = \beta_{(i_1,\ldots,i_n)} 0 = 0$. (b) $j_1 + \cdots + j_n \geqslant 1$, logo $i_1 + \cdots + i_n + 1 \leqslant i_1 + \cdots + i_n + j_1 + \cdots + j_n < k$, ou seja, $i_1 + \cdots + i_n < k-1$ e pela hipotese de indução temos neste caso que $\beta_{(i_1,\ldots,i_n)} = 0$, assim $\beta_{(i_1,\ldots,i_n)} \gamma_{(j_1,\ldots,j_n)} = 0$. Logo para $m_1 + \cdots + m_n < k$, pelo que vimos em (a) e (b), podemos observar que

$$\alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} = \sum \beta_{(i_1,\ldots,i_n)} \gamma_{(j_1,\ldots,j_n)} = 0.$$

Onde podemos concluir que $\omega^k(R)$ consiste dos elementos de R cuja constante de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$, com $0 \leqslant m_1 + \cdots + m_n < k$, é nula.

(ii) Considere $r_1, \ldots, r_n \in R$ os elementos homogêneos que formam um sistema mínimo de geradores de R, tome $r \in \omega(R) \setminus \omega^2(R)$, então $r = \sum \alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}$, com $\alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} \in \mathbb{K}$, $\alpha_{(0,\ldots,0)} = 0$ e $\alpha_{(m_1,\ldots,m_n)}$ não todos nulos para $m_1 + \cdots + m_n = 1$. Defina

$$x = \alpha_{(1,0,\ldots,0)} r_1 + \alpha_{(0,1,\ldots,0)} r_2 + \cdots + \alpha_{(0,\ldots,0,1)} r_n,$$

então $r - x \in \omega^2(R)$, pois $\alpha_{(1,0,\ldots,0)}r_1, \alpha_{(0,1,\ldots,0)}r_2, \ldots, \alpha_{(0,\ldots,1,0)}r_{n-1}$ e $\alpha_{(0,\ldots,0,1)}r_n$ são os únicos termos de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$ com $m_1 + \cdots + m_n = 1$. Logo segue que

$$r - x \in \omega^2(R) \Leftrightarrow r + \omega^2(R) = x + \omega^2(R) \Leftrightarrow$$

$$r+\omega^2(R) = \alpha_{(1,0,\ldots,0)}\left(r_1 + \omega^2(R)\right)+\alpha_{(0,1,\ldots,0)}\left(r_2 + \omega^2(R)\right)+\cdots+\alpha_{(0,\ldots,0,1)}\left(r_n + \omega^2(R)\right).$$

Ou seja, $\{r_1 + \omega^2(R), \ldots, r_n + \omega^2(R)\}$ gera o espaço vetorial $\dfrac{\omega(R)}{\omega^2(R)}$. Digamos que exista $\{i_1, \ldots, i_\ell\} \subset \{1, \ldots, n\}$, com $\ell < n$, talque $\{r_{i_1} + \omega^2(R), \ldots, r_{i_\ell} + \omega^2(R)\}$ também gera o espaço vetorial $\dfrac{\omega(R)}{\omega^2(R)}$. Como $\ell < n$ tome $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_\ell\}$, então por definição sabemos que $r_j \notin \omega^2(R)$, assim existem $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$r_j + \omega^2(R) = \beta_1\left(r_{i_1} + \omega^2(R)\right) + \cdots + \beta_\ell\left(r_{i_\ell} + \omega^2(R)\right),$$

logo $\beta_1 r_{i_1} + \cdots + \beta_\ell r_{i_\ell} - r_j \in \omega^2(R)$, note que necessariamente temos $\beta_1 r_{i_1} + \cdots + \beta_\ell r_{i_\ell} - r_j = 0$, pois vimos no item (i) que $\omega^2(R)$ só tem elementos cuja constante do multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$, $0 \leqslant m_1 + \cdots + m_n < 2$, é nula. Assim

$$r_j = \beta_1 r_{i_1} + \cdots + \beta_\ell r_{i_\ell},$$

o que contraria a minimalidade do sistema de geradores $\{r_1, \ldots, r_n\}$ de R.

$$\therefore \{r_1 + \omega^2(R), \ldots, r_n + \omega^2(R)\} \text{ é uma base para o espaço vetorial } \frac{\omega(R)}{\omega^2(R)}.$$

Suponha que $\{r_1 + \omega^2(R), \ldots, r_n + \omega^2(R)\}$ forme uma base para o espaço vetorial $\dfrac{\omega(R)}{\omega^2(R)}$. Tome $r \in R$ qualquer, sem perda de generalidade suponha $r \in \omega(R)$, pois caso $r \notin \omega(R)$ basta considerarmos $r - \alpha_{(0,\ldots,0)} \in \omega(R)$. Sabemos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $r - (\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_n r_n) \in \omega^2(R)$, assim temos $x_0, x_1 \in \omega(R)$ com $r - (\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_n r_n) = x_0 x_1$. Novamente para $i_1 \in \{0, 1\}$ temos $\alpha_{1i_1}, \ldots, \alpha_{ni_1} \in \mathbb{K}$ tais que $x_{i_1} - (\alpha_{1i_1} r_1 + \cdots + \alpha_{ni_1} r_n) \in \omega^2(R)$, ou seja, $x_{i_1} - (\alpha_{1i_1} r_1 + \cdots + \alpha_{ni_1} r_n) = x_{i_1 0} x_{i_1 1}$, com $x_{i_1 i_2} \in \omega(R)$, $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$. Podemos repetir o processo para $x_{i_1 i_2}$, $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$, e para os próximos elementos de $\omega(R)$ até que tenhamos $x_{i_1 i_2 \ldots i_m} - (\alpha_{1 i_1 i_2 \ldots i_m} r_1 + \cdots + \alpha_{n i_1 i_2 \ldots i_m} r_n) = 0$, então quando fizermos as devidas substituições veremos que $r = \sum \alpha_{(m_1,\ldots,m_n)} r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}$, logo $\{r_1, \ldots, r_n\}$ é um sistema de geradores de R, e este sistema é mínimo, pois caso $\{r_1, \ldots, r_\ell\}$ seja o sistema mínimo que gera R com $\ell < n$, então $\{r_1 + \omega^2(R), \ldots, r_\ell + \omega^2(R)\}$ será base de $\dfrac{\omega(R)}{\omega^2(R)}$, como vimos na implicação $\Rightarrow$, o que contraria a hipótese de $\{r_1 + \omega^2(R), \ldots, r_n + \omega^2(R)\}$ ser base de $\dfrac{\omega(R)}{\omega^2(R)}$. Portanto os elementos homogêneos $r_1, \ldots, r_n \in R$ formam um sistema mínimo de geradores de R.

□

1.4 Representações e Diagramas de Young

Definição 1.38. *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Uma **representação** Φ de G em V é um homomorfismo de grupos*

$$\Phi : G \longrightarrow GL\,(V)\,.$$

*O **grau** da representação Φ é igual a dimensão do espaço vetorial V. A representação Φ é **fiel** se $Ker\,(\Phi) = \{0\}$, e Φ é **trivial** se $Ker\,(\Phi) = G$.*

Exemplo 1.14. *(i) Considere o grupo $\mathbb{Z}_3^*$ e tomando $V = \mathbb{R}^2$, defina*

$$\Phi(\overline{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Phi(-\overline{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim definimos uma função $\Phi : \mathbb{Z}_3^* \longrightarrow GL(V)$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi\left(\overline{1}(-\overline{1})\right) = \Phi(-\overline{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi(\overline{1})\Phi(-\overline{1}), \\ \Phi\left(\overline{1}\overline{1}\right) = \Phi(\overline{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi(\overline{1})\Phi(\overline{1}), \\ \Phi\left((-\overline{1})(-\overline{1})\right) = \Phi(\overline{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi(-\overline{1})\Phi(-\overline{1}). \end{aligned}$$

Logo Φ é um homomorfismo de grupos, ou seja, uma representação de $\mathbb{Z}_3^*$ em $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.39. *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial.*

*(i) Duas representação $\Phi : G \longrightarrow GL\,(V)$ e $\Psi : G \longrightarrow GL\,(W)$ são chamadas de **equivalentes** (ou isomorfas) se existir um homomorfismo bijetor $\theta : V \longrightarrow W$ dos espaços vetoriais V e W tais que*

$$\left(\theta \circ \Phi(g)\right)(v) = \left(\Psi(g) \circ \theta\right)(v), \forall v \in V, \forall g \in G.$$

(ii) Se W é um subespaço do $\mathbb{K}$-espaço vetorial V e Φ é uma representação do grupo G em V tal que $\left(\Phi(g)\right)(w) \in W$ para cada $g \in G$ e $w \in W$, então a representação $\Psi : G \longrightarrow GL\,(W)$ definida por

$$\left(\Psi(g)\right)(w) = \left(\Phi(g)\right)(w), \forall g \in G, \forall w \in W,$$

*é chamada de **sub-representação** de $\Phi : G \longrightarrow GL\,(V)$. A sub-representação Ψ é **própia** se $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$.*

*(iii) A representação $\Phi : G \longrightarrow GL\,(V)$ é **irredutível** se não possuir sub-representações próprias. Φ é **completamente irredutível** se for a soma direta de representações irredutíveis.*

Definição 1.40. *Sejam V um espaço vetorial, R uma álgebra associativa e $End(V) := \{\Phi : V \longrightarrow V \mid \Phi$ é um homomorfismo$\}$. Chamaremos V de R-**módulo** se existir um homomorfismo entre álgebras $\rho : R \longrightarrow End(V)$ tal que $\rho(\mathbb{1}) = id$. As noções de grau, equivalente, sub-representação, irredutível e completamente irredutível de representações correspondem a noções similares para R-módulos.*

Exemplo 1.15. *Seja G um grupo finito. Então a álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Se $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação, então defina $\rho : \mathbb{K}G \longrightarrow GL(V)$ nos elementos da base de $\mathbb{K}G$ por*

$$\rho(g) = \Phi(g), g \in G.$$

Assim estendemos para um elemento qualquer $\sum \alpha_g g \in \mathbb{K}G$ por

$$\rho\left(\sum \alpha_g g\right) = \sum \alpha_g \rho(g).$$

Note que para $g, h \in G$ temos

$$\rho(gh) = \Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h) = \rho(g)\rho(h) \quad e \quad \rho(g+h) = \rho(g) + \rho(h).$$

Logo ρ é um homomorfismo entre álgebras, ou seja, V é um $\mathbb{K}G$-módulo. Neste caso é comum dizermos G-módulo ao invés de $\mathbb{K}G$-módulo.

Proposição 1.14. *Sejam $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\Psi : G \longrightarrow GL(W)$ duas representações de G. Defina $\Theta : G \longrightarrow GL(V \oplus W)$ por*

$$(\Theta(g))(v \oplus w) = ((\Phi(g))(v)) \oplus ((\Psi(g))(w)),$$

*para cada $g \in G$, $v \in V$ e $w \in W$. Então Θ é uma representação de G em $V \oplus W$, chamaremos Θ de **soma direta** de Φ com Ψ e denotaremos $\Theta = \Phi \oplus \Psi$.*

Proposição 1.15. *Para duas G-representações $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\Psi : G \longrightarrow GL(W)$, onde V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, defina*

$$(\Phi \otimes \Psi(g))(v \otimes w) = ((\Phi(g))(v)) \otimes ((\Psi(g))(w)),$$

para cada $g \in G$, $v \in V$ e $w \in W$. Temos que $\Phi \otimes \Psi : G \longrightarrow GL(V \otimes W)$ é uma G-representação de $V \otimes W$ a qual chamaremos de produto tensorial de Φ por Ψ. O resultado é análogo para quando o produto tensorial é simétrico.

Exemplo 1.16. *Tome V e W dois G-módulos cujas representações sejam $\rho_1 : \mathbb{K}G \longrightarrow End(V)$ e $\rho_2 : \mathbb{K}G \longrightarrow End(W)$. $V \otimes W$ é o G-módulo que possui como representação $\rho_1 \otimes \rho_2 : \mathbb{K}G \longrightarrow End(V \otimes W)$. Se $V_1, \ldots, V_n$ são G-módulos, definimos recursivamente*

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n = (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n.$$

O caso é análogo para quando o produto tensorial é simétrico.

Definição 1.41. *Sejam G um grupo finito e $V_1, \dots, V_r$ G-módulos não isomorfos dois a dois. Tome W um G-módulo de dimensão finita tal que se decompõe em uma soma de G-módulos irredutíveis da seguinte forma $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$. Se m_i dos módulos $W_1, \dots, W_s$ são isomorfos a V_i, chamaremos o inteiro não negativo m_i de* ***multiplicidade*** *de V_i na decomposição de W e escreveremos*

$$W = m_1 V_1 \oplus \cdots \oplus m_r V_r.$$

O proximo teorema pode ser encontrado em [9], Teorema 12.1.15.

Teorema 1.6. *Sejam G um grupo finito e $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Então o número de G-módulos irredutíveis não isomorfas de G é igual ao número de classes de conjugação de G.*

Observação 1.7. *No grupo das permutações S_n sabemos que existem $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_n$ tais que $S_n = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{t} [\sigma_i]$. Como vimos no Teorema 1.6 o número de G-módulos não isomorfos de S_n é t, digamos que estes G-módulos sejam $M_1, \dots, M_t$. Então $S_n \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$. Digamos que a decomposição em produtos de ciclos disjuntos de σ_i seja*

$$\sigma_i = \left(1 \dots \lambda_1^{(i)}\right)\left(\lambda_1^{(i)} + 1 \dots \lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)}\right) \cdots \left(\lambda_1^{(i)} + \cdots + \lambda_{k_i-1}^{(i)} + 1 \dots \lambda_1^{(i)} + \cdots + \lambda_{k_i}^{(i)}\right),$$

sempre é possível tomar um representante para a classe de conjugação desse tipo, basta observar o que foi feito na demonstração da Proposição 1.6. Como existe uma bijeção $\{M_1, \dots, M_t\} \longleftrightarrow \{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$ é usual denotarmos

$$M_i = M\left([\sigma_i]\right) = M_{\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{k_i}^{(i)}}.$$

Definição 1.42. *Uma* ***partição*** *de n (em não mais que k partes) é uma k-upla de inteiros não negativos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ em ordem não crescente (isto é $\lambda_i \geqslant \lambda_j$ para $i < j$) é tal que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$. Usaremos a notação $\lambda \vdash n$. Se duas partições diferem apenas por uma série de zeros no final, então nós a identificaremos como iguais. Por exemplo, se $\lambda \vdash n$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, então $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, 0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) \vdash n$. Suponha que $\{\mu_1, \dots, \mu_\ell\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, $\ell \leqslant k$, $\mu_i > \mu_j$ para $i < j$ e μ_i aparece r_i-vezes na k-upla $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, então é conveniente escrever a partição de forma reduzida da seguinte maneira $\lambda = (\mu_1^{r_1}, \dots, \mu_\ell^{r_\ell})$.*

Observação 1.8. *Existe uma bijeção entre o conjunto das classes de equivalência de S_n e o conjunto das partições de n. Para verificar isso note que dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de n basta tomarmos*

$$\sigma = (1 \dots \lambda_1)(\lambda_1 + 1 \dots \lambda_1 + \lambda_2) \cdots (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1 \dots \lambda_1 + \cdots + \lambda_k). \tag{1.1}$$

Então λ está correspondida com a classe de conjugação $[\sigma]$. Agora, como vimos na Observação 1.7, dada a classe de conjugação $[\sigma]$ sempre podemos considerar o representante *da forma (1.1). Temos que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \leqslant n$. Se $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k < n$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + p = n$. Redefinindo σ da seguinte forma*

$$\overline{\sigma} = \sigma \left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + 1\right) \left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + 2\right) \cdots \left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + p\right).$$

Note que $\overline{\sigma} = \sigma$ e a classe $[\overline{\sigma}]$ estará correspondida com $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 1^p)$. Se $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$ então $[\sigma]$ estará correspondido com $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, assim como vimos na Observação 1.7, existe uma bijeção entre as representações irredutíveis, não isomorfas duas a duas, de S_n e as partições de n, o que nos leva a notação

$$S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} M(\lambda),$$

onde a soma percorre todas as partições de n e $M(\lambda)$ é a representação irredutível de S_n que está relacionada com a partição λ de n.

Definição 1.43. *O **diagrama de Young** $[\lambda]$ da partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ pode ser definido graficamente como o conjunto de caixas, de mesmo tamanho, justificadas à esquerda tal que na i-ésima linha temos λ_i caixas. Note que, levando em conta as notações da Definição 1.42, para desenharmos o diagrama de Young da partição λ precisamos considerar a k-upla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ e não sua forma reduzida $(\mu_1^{r_1}, \ldots, \mu_\ell^{r_\ell})$.*

Exemplo 1.17. *Vejamos alguns diagramas de Young. Considere as partições $\lambda = (4, 2, 1)$ e $\mu = (2^2, 1^3)$ de 7, então:*

Figura 1 – Diagramas de Young de $[\lambda]$, a esquerda, e $[\mu]$, a direita.

Definição 1.44. *Para uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$, definimos a **$\lambda$-tabela**, denotada por T_λ, de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, onde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$, como o diagrama de Young $[\lambda]$ cujas caixas estão preenchidas com uma quantidade α_i de números i.*

Exemplo 1.18. *Considere $\lambda = (3, 2) \vdash 5$ e $\alpha = (1, 3, 1)$, $\beta = (3, 2)$ e $\gamma = (1, 4)$. Note que apesar das λ-tabela das Figuras 2 e 3 possuirem o mesmo conteúdo α, elas não estão preenchidas da mesma maneira. Observe também que λ e β são iguais como par ordenado, mas tem significado diferente se olharmos como partição ou como conteúdo de uma λ-tabela. Este fato é reforçado se observarmos que o conteúdo pode admitir uma ordem crescente dos elementos da k-upla, como é o caso do conteúdo γ.*

1	3	2
2	2	

Figura 2 – λ-tabela de conteúdo α

2	2	2
3	1	

Figura 3 – λ-tabela de conteúdo α

1	2	1
2	1	

Figura 4 – λ-tabela de conteúdo β

2	2	2
2	1	

Figura 5 – λ-tabela de conteúdo γ

Definição 1.45. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ uma partição e T_λ uma λ-tabela de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.*

*(i) A tabela T_λ é **semistandard** se as entradas não decrescem da esquerda para direita nas linhas e são estritamente crescentes de cima para baixo nas colunas.*

*(ii) A tabela T_λ é **standard** se for semistandard e $\alpha_i = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots .m\}$. Desta forma teremos, necessariamente, que $n = m$ e todo inteiro $1, \ldots, n$ aparece exatamente uma vez na tabela.*

Exemplo 1.19. *Na Figura 6, da esquerda para direita, temos exemplos de, respectivamente, uma tabela semistandard, uma standard e uma que não é semistandard.*

1	1	2	4
2	2		
3			

1	3	6	7
2	4		
5			

1	2	3	4
6	5		
7			

Figura 6 – Tabelas standard e semistandard.

Definição 1.46. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão s e Φ uma representação de $GL_m(\mathbb{K})$ em V. Suponha que exista uma base $\{v_1, \ldots, v_s\}$ de V tal que se tomamos $g = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(g)} & \ldots & \beta_{1m}^{(g)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}^{(g)} & \ldots & \beta_{mm}^{(g)} \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{K})$, que age da seguinte forma na base dada de V*

$$(\Phi(g))(v_j) = \alpha_{1j}^{(g)} v_1 + \cdots + \alpha_{sj}^{(g)} v_s,\ j \in \{1, \ldots, s\},\ \alpha_{ij}^{(g)} \in \mathbb{K},$$

*ou seja $\Phi(g) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(g)} & \ldots & \alpha_{1s}^{(g)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{s1}^{(g)} & \ldots & \alpha_{ss}^{(g)} \end{pmatrix}$, temos que $\alpha_{ij}^{(g)} \in \mathbb{K}\left[\beta_{pq}^{(g)} | p, q \in \{1, \ldots, m\}\right]$. Então diremos que Φ é uma **representação polinomial**. O $GL_m(\mathbb{K})$-módulo V é polinomial se a representação correspondente é polinomial.*

Definição 1.47. *Seja $\Phi : GL_m(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_s(\mathbb{K})$ uma representação polinomial. Se os polinômios $(\Phi(g))_{pq}$ das entradas da matriz $\Phi(g)$ forem homogêneos de grau ℓ, para cada*

$g \in GL_m(\mathbb{K})$, então diremos que a representação Φ é ***homogênea*** *de grau ℓ. Se o $GL_m(\mathbb{K})$-módulo polinomial V tem representação polinomial homogênea de grau ℓ, então o chamaremos de $GL_m(\mathbb{K})$-módulo polinomial homogêneo de grau ℓ.*

Os resultados sobre representação polinomial que serão enunciados a seguir podem ser encontrados em [9], Capítulo 12.

Teorema 1.7. *(i) Toda representação polinomial de $GL_m(\mathbb{K})$ é uma soma direta de sub-representações polinomiais homogêneas irredutíveis.*

(ii) Todo $GL_m(\mathbb{K})$-módulo polinomial homogêneo irredutível de grau n é isomorfo à um submódulo de $(\mathbb{K}\langle V_m\rangle)^{(n)}$.

Teorema 1.8. *(i) O conjunto das $GL_m(\mathbb{K})$-representações polinomiais homogêneas irredutíveis e não isomorfas duas a duas de grau n estão em bijeção com o conjunto das partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de n (em não mais que m partes). Denotamos por $W_m(\lambda)$ o $GL_m(\mathbb{K})$-módulo irredutível relacionado a λ.*

(ii) Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n. O $GL_m(\mathbb{K})$-módulo $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de $(\mathbb{K}\langle V_m\rangle)^{(n)}$. O $GL_m(\mathbb{K})$-módulo $(\mathbb{K}\langle V_m\rangle)^{(n)}$ possui uma decomposição

$$(\mathbb{K}\langle V_m\rangle)^{(n)} \cong \sum d_\lambda W_m(\lambda),$$

onde d_λ é a dimensão do S_n-módulo irredutível $M(\lambda)$ e o somatório percorre todas as partições de λ de n em não mais que m partes.

(iii) Como um subespaço vetorial de $(\mathbb{K}\langle V_m\rangle)^{(n)}$, o espaço vetorial $W_m(\lambda)$ é multi-homogêneo. A dimensão de sua componente $W_m^{(n_1,\ldots,n_m)}$ é igual ao número de λ-tabelas semistandard de conteúdo $(n_1, \ldots, n_m)$.

(iv) A série de Hilbert

$$Hilb(W_m(\lambda), t_1, \ldots, t_m) = \sum dim\left(W_m^{(n_1,\ldots,n_m)}\right) t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m},$$

é um polinômio simétrico e é igual ao quociente

$$\frac{D(\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \ldots, \lambda_{m-1} + 1, \lambda_m)}{D(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)},$$

onde

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_m) = \begin{vmatrix} t_1^{\mu_1} & t_2^{\mu_1} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_1} & t_m^{\mu_1} \\ t_1^{\mu_2} & t_2^{\mu_2} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_2} & t_m^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1^{\mu_{m-1}} & t_2^{\mu_{m-1}} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_{m-1}} & t_m^{\mu_{m-1}} \\ t_1^{\mu_m} & t_2^{\mu_m} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_m} & t_m^{\mu_m} \end{vmatrix}.$$

A função

$$S_{\lambda}(t_1, \ldots, t_m) = Hilb\left(W_m\left(\lambda\right), t_1, \ldots, t_m\right),$$

é chamada de ***função de Schur*** *correspondente a λ.*

A próxima proposição pode ser consultada em [17].

Proposição 1.16. *Seja $W_m(\lambda)$ o $GL_m(\mathbb{K})$-módulo irredutível relacionado a λ. Então*

$$dim\left(W_m\left(\lambda\right)\right) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

Exemplo 1.20. *Seja $\lambda = (2, 1)$ uma partição de 3 e $W_3(\lambda)$ o $GL_3(\mathbb{R})$-módulo irredutível relacionado a $\lambda = (2, 1)$. As únicas $(2, 1)$-tabelas semistandard são as de conteúdo $(1, 1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 2, 1)$ e $(0, 1, 2)$ que estão mostradas na Figura 7.*

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 7 – $(2, 1)$-tabelas semistandard.

Levando em conta o item (iii) do Teorema 1.8 segue que as dimensões das componentes multi-homogêneas de $W_3(2, 1)$ são

$$dim\left(W_3^{(n_1,n_2,n_3)}\right) = \begin{cases} 2 & , se\ (n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 1) \\ 1 & , se\ (n_1, n_2, n_3) \in \{(2, 1), (1, 2), (2, 0, 1), (1, 0, 2), (0, 2, 1), (0, 1, 2)\} \\ 0 & , caso\ contrário \end{cases}.$$

Logo

$$S_{(2,1)}(t_1, t_2, t_3) = Hilb\left(W_3(2, 1), t_1, t_2, t_3\right) = 2t_1t_2t_3 + t_1^2t_2 + t_1t_2^2 + t_1^2t_3 + t_1t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2.$$

Também podemos calcular a função de Schur correspondente a $(2, 1)$ usando a fórmula do determinante desta forma

$$D(2{+}2, 1{+}1, 0{+}0) = \begin{vmatrix} t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t_1^4t_2^2{+}t_2^4t_3^2{+}t_1^2t_3^4{-}(t_2^2t_3^4{+}t_1^2t_2^4{+}t_1^4t_3^2) = (t_1^2{-}t_2^2)(t_1^2{-}t_3^2)(t_2^2{-}t_3^2).$$

$$D(2, 1, 0) = \begin{vmatrix} t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t_1^2t_2 + t_2^2t_3 + t_1t_3^2 - (t_2t_3^2 + t_1t_2^2 + t_1^2t_3) = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3).$$

Assim

$$S_{(2,1)}(t_1,t_2,t_3) = \frac{D(4,2,0)}{D(2,1,0)} = \frac{(t_1^2-t_2^2)(t_1^2-t_3^2)(t_2^2-t_3^2)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = (t_1+t_2)(t_1+t_3)(t_2+t_3).$$

Definição 1.48. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e sejam $q_1, \ldots, q_{\lambda_1}$ os comprimentos das colunas do diagrama de Young de λ.*

(i) Definimos o ***polinômio standard*** *de grau k por*

$$s_k(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{\sigma\in S_k} sign(\sigma)x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(k)}.$$

(ii) Denotamos por $s_\lambda = s_\lambda(x_1,\ldots,x_{\lambda_1})$ o seguinte polinômio de $\mathbb{K}\langle V_m\rangle$

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_{\lambda_1}) = \prod_{j=1}^{\lambda_1} s_{q_j}(x_1,\ldots,x_{q_j})$$

Teorema 1.9. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e considere $(\mathbb{K}\langle V_m\rangle)^{(n)}$ a componente homogênea de grau n de $\mathbb{K}\langle V_m\rangle$. Os polinômios s_λ geram um $GL_m(\mathbb{K})$-submódulo irredutível de $(\mathbb{K}\langle V_m\rangle)^{(n)}$ isomorfo a $W_m(\lambda)$ e denotamos esse gerador por $w_\lambda(x_1,\ldots,x_{\lambda_1}) = s_\lambda(x_1,\ldots,x_{\lambda_1})$. Podemos escrever $w_\lambda(x_1,\ldots,x_m)$ mesmo que $\lambda_1 < m$.*

O próximo lema é um caso partivular de um resultado encontrado por De concini, Eisenbud e Procesi [6], veja tambem Almkvist, Dicks e Formanek [2]. Na versão que iremos utilizar a primeira parte do lema foi demonstrado por Koshlukov [14] (Lema 1.1.3).

Lema 1.1. *Sejam $i, j \in \{1, \ldots .d\}$. $i < j$ e Δ_{ij} uma derivação de $\mathbb{K}\langle x_1,\ldots,x_d\rangle$ definida por $\Delta_{ij}(x_j) = x_i$, $\Delta_{ij}(x_k) = 0$, se $k \neq j$. Tome $w(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{K}\langle x_1,\ldots,x_d\rangle$ um polinômio multi-homogêneo de grau $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$. Então $w(x_1,\ldots,x_d)$ é um gerador de $W(\lambda)$ se, e somente se, $\Delta_{ij}(w(x_1,\ldots,x_d)) = 0$ para todo $i < j$. Equivalentemente, $w(x_1,\ldots,x_d)$ é um gerador para $W(\lambda)$ se, e somente se*

$$g_{ij}(w(x_1,\ldots,x_d)) = w(x_1,\ldots,x_d), 1 \leqslant i \leqslant d,$$

onde g_{ij} é um operador linear de um espaço vetorial de dimensão d que envia x_j em $x_i + x_j$ e fixa as demais entradas.

Observação 1.9. *Se W_i, $i \in \{1,\ldots,m\}$, são m cópias isomorfas ao GL_d-módulo $W(\lambda)$ e w_i são geradores de W_i, então todos os geradores de qualquer submódulo de $W(\lambda)$ da soma direta $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ é da forma $\xi_1 w_1 + \cdots + \xi_m w_m$, para algum $\xi_i \in \mathbb{K}$. Quaisquer m geradores linearmente independentes podem servir como um conjunto de geradores do GL_d-módulo $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.*

Lema 1.2. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ uma partição e T_λ uma λ-tabela de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Denote por $b_{i,j}$, $i < j$, a quantidade de vezes que o inteiro j aparece na linha i da tabela T_λ. Considere $w(x_1, \ldots, x_d)$ um gerador de $W(\lambda) \subset \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$. Defina*

$$u_{T_\lambda}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1d}, x_{22}, \ldots, x_{2d}, x_{31}, \ldots, x_{dd}),$$

como o polinômio formado pelas componente multi-homogêneas de grau $b_{i,q}$ em x_{iq}, $q \in \{i, i+1, \ldots, d\}$, do polinômio

$$w(x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1d}, x_{22} + \cdots + x_{2d}, \ldots, x_{dd}).$$

Defina também

$$v_{T_\lambda} = v_{T_\lambda}(x_1, \ldots, x_d) = u_{T_\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_d, x_2, \ldots, x_d, \ldots, x_d).$$

Então o conjunto formado pelos polinômios v_{T_λ}, quando T_λ percorre todas as λ-tabelas semistandard, é uma base para o espaço vetorial $W(\lambda)$.

Demonstração. Por argumentos padrões de Vandermonde, o polinômio

$$u_{T_\lambda}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1d}, x_{22}, \ldots, x_{2d}, x_{31}, \ldots, x_{dd})$$

é uma combinação linear de $w\left(\sum g_{1j}x_{1j}, \ldots, \sum g_{dj}x_{dj}\right)$, $g_{ij} \in \mathbb{K}$, tais que as matrizes $d \times d$ (g_{ij}) pertencem a $GL_d(\mathbb{K})$. Logo $v_{T_\lambda}(x_1, \ldots, x_d)$ será uma combinação linear de $w\left(\sum g_{1j}x_j, \ldots, \sum g_{dj}x_j\right)$ e pertencerá ao GL_d-módulo $W(\lambda)$ gerado por $w(x_1, \ldots, x_d)$. Sem perda de generalidade, é suficiente considerar o caso em que $W(\lambda)$ é gerado por $w(x_1, \ldots, x_d) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_d)$ (ver Teorema 1.9). Por definição o polinômio $w(x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1d}, x_{22} + \cdots + x_{2d}, \ldots, x_{dd})$ será um produto de polinômios standard

$$s_{k_j}(x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1d}, x_{22} + \cdots + x_{2d}, \ldots, x_{k_jk_j} + \cdots + x_{k_jd}).$$

Então $u_{T_\lambda}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1d}, \ldots, x_{dd})$ é uma combinação linear de monômios começando com $x_{\sigma(1)q_1} \ldots x_{\sigma(k_1)q_{k_1}}$. Ordenaremos as variáveis por $x_1 > \ldots > x_d$ e consideraremos a ordem do dicionário em $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$. A primeira coluna da λ-tabela semistandard T_λ contém $\alpha_{11} < \ldots < \alpha_{k_11}$ e em cada linha $\alpha_{i1} \leqslant \alpha_{ij}$, com $j \in \{2, \ldots, \lambda_i\}$. Isto nos dá que o primeiro monômio de v_{T_λ} começa com $x_{\alpha_{11}}x_{\alpha_{21}} \ldots x_{\alpha_{k_11}}$. Logo as primeiras k_1 variáveis do primeiro monômio estão indexadas pelas entradas da primeira coluna da λ-tabela. Prosseguindo da mesma maneira, obteremos que as próximas k_2 variáveis do primeiro monômio estão indexadas pela segunda coluna, e assim por diante. Então, para λ fixo, o primeiro monômio de v_{T_λ} determina completamente a λ-tabela T_λ, logo os polinômios v_{T_λ} são linearmente independentes. Uma vez que, pelo que vimos no item (iii) do Teorema 1.8, $W(\lambda)$ possui uma base que está em correspondência biunívoca com as λ-tabelas semistandard. Como o número de polinômios v_{T_λ} é igual ao número de λ-tabelas semistandad, obteremos que os polinômios v_{T_λ} formam uma base para $W(\lambda)$. □

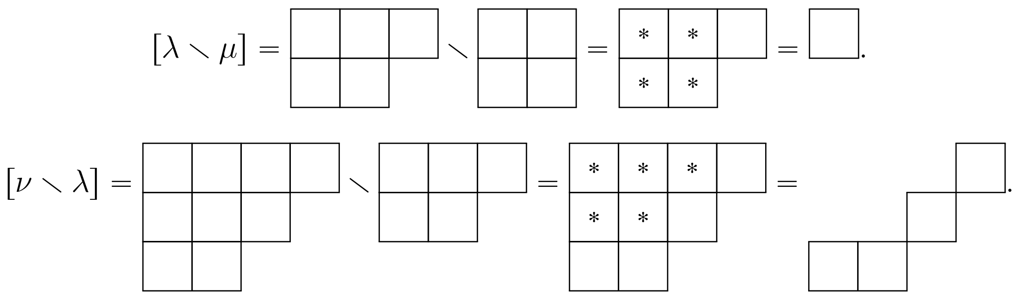
Definição 1.49. *Considere* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ *e* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_\ell) \vdash m$.

(i) Dizemos que $\lambda \geqslant \mu$ *quando* $k \geqslant \ell$ *e* $\lambda_i \geqslant \mu_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, \ell\}$. *Neste caso é usual dizer que o diagrama de Young de* μ *está contido no diagrama de Young de* λ *e escrevermos* $[\mu] \subset [\lambda]$.

(ii) Se $\lambda \geqslant \mu$ *temos a* ***skew-partição*** $\lambda \setminus \mu = (\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_\ell - \mu_\ell, \lambda_{\ell+1}, \ldots, \lambda_k)$. *O* ***skew-diagrama de Young*** $[\lambda \setminus \mu]$ *da skew-partição* $\lambda \setminus \mu$ *é representado graficamente como o conjunto de caixas que pertencem ao diagrama de Young* $[\lambda]$ *e não pertencem ao diagrama de Young* $[\mu]$.

(iii) Quando $[\mu] \subset [\lambda]$ *a* $\lambda \setminus \mu$***-skew-tabela*** $T_{\lambda \setminus \mu}$ *é um preenchimento das caixas do skew-diagrama de Young* $[\lambda \setminus \mu]$ *com um dado conteúdo. Desta forma podemos usar de maneira natural a Definição 1.45.*

Exemplo 1.21. *Sejam* $\lambda = (3, 2)$, $\mu = (2^2)$ *e* $\nu = (4, 3, 2)$. *Então* $\lambda \setminus \mu = (1, 0)$, $\nu \setminus \lambda = (1, 1, 2)$ *e seus respectivos skew-diagramas são construídos da seguinte forma*



A seguir, na Figura 8, estão exemplos de $T_{\nu \setminus \lambda}$ *skew-tabelas de conteúdo* $(1, 2, 1)$ *e* $(2, 1, 1)$, *respectivamente*

Figura 8 – Skew-tabelas semi-standard.

Definição 1.50. *Seja* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ *uma sequência de números inteiros positivos tal que para qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *temos que na subsequência*

$$r_1, r_2, \ldots, r_n,$$

a quantidade de números i *é sempre maior, ou igual, a quantidade de números* $i + 1$. *Uma sequência de inteiros positivos com esta propriedade é dito estar em* ***rede***.

Exemplo 1.22. *(i) A sequência* $1, 2, 3, 1$ *está em rede. Para verificar este fato basta observar as subsequências*

1	1 *aparece* 1 *vez.*
$1, 2$	1 *aparece* 1 *vez,* 2 *aparece* 1 *vez.*
$1, 2, 3$	1 *aparece* 1 *vez,* 2 *aparece* 1 *vez,* 3 *aparece* 1 *vez.*
$1, 2, 3, 1$	1 *aparece* 2 *vezes,* 2 *aparece* 1 *vez,* 3 *aparece* 1 *vez.*

(ii) A sequência $1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2$ *não está em rede, pois na subsequência* $1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2$ *o número* 1 *aparece* 4 *vezes, enquanto o número* 2 *aparece* 5 *vezes.*

Teorema 1.10 (Regra de Littlewood-Richardson)**.** *Sejam* $\lambda \vdash n$ *e* $\mu \vdash m$*, então*

$$W(\lambda) \otimes W(\mu) \cong \sum_{\nu \vdash (n+m)} \kappa^{\mu}_{\nu \setminus \lambda} W(\nu),$$

onde $\kappa^{\mu}_{\nu \setminus \lambda}$ *é o número de* $\nu \setminus \lambda$*-skew-tabelas (com* $\nu \geqslant \lambda$*) de conteúdo* μ *tal que a sequência formada pelos números que preenchem* $[\nu \setminus \lambda]$*, na ordem que estão da direita para a esquerda e depois para baixo, está em rede.*

A demonstração da Regra de Littlewood-Richardson pode ser encontrada em [17].

Observação 1.10. *A skew-tabela da Figura 8*

$$\begin{array}{cccc} & & & \boxed{1} \\ & & \boxed{2} & \\ \boxed{1} & \boxed{3} & & \end{array},$$

é tal que a sequência formada pelos números que a preenchem, na ordem que estão da direita para a esquerda e depois para baixo, está em rede. Pois esta referida sequência é $1, 2, 3, 1$ *que, como vimos no Exemplo 1.22, está em rede.*

Exemplo 1.23. *Calcularemos* $W(3, 2) \otimes W(2, 1^2)$*. Abaixo estão listadas as* $\nu \setminus (3, 2)$*-skew-tabelas (com* $\nu \geqslant (3, 2)$ *e* $\nu \vdash 9$*) de conteúdo* $(2, 1, 1)$ *tal que a sequência formada pelos números que preenchem* $[\nu \setminus (3, 2)]$*, na ordem que estão da direita para a esquerda e depois para baixo, estão em rede.*

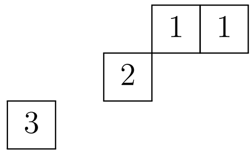


Figura 9 – $T_{(5,3,1)\setminus(3,2)}$.

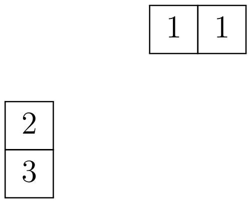


Figura 10 – $T_{(5,2,1^2)\setminus(3,2)}$.

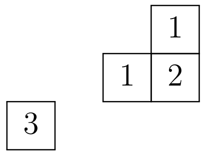


Figura 11 – $T_{(4^2,1)\setminus(3,2)}$.

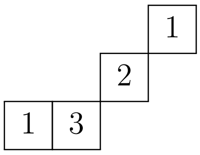


Figura 12 – $T_{(4,3,2)\setminus(3,2)}$.

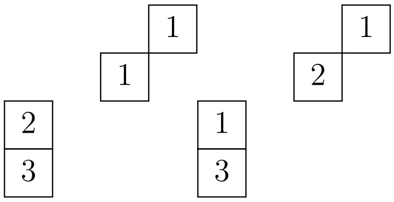


Figura 13 – $T_{(4,3,1^2)\setminus(3,2)}$.

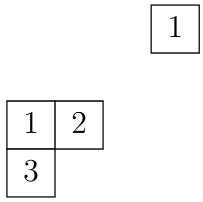


Figura 14 – $T_{(4,2^2,1)\setminus(3,2)}$.

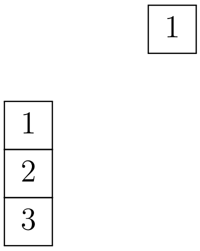


Figura 15 – $T_{(4,2,1^3)\setminus(3,2)}$.

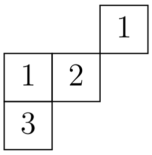


Figura 16 – $T_{(3^2,2,1)\setminus(3,2)}$.

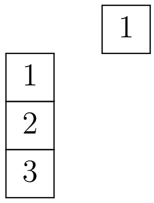


Figura 17 – $T_{(3^2,1^3)\setminus(3,2)}$.

Logo $\kappa^{(2,1^2)}_{\nu\setminus(3,2)} = 1$ *para*
$\nu \in \{(5,3,1),(5,2,1^2),(4^2,1),(4,3,2),(4,2^2,1),(4,2,1^3),(3^2,2,1),(3^2,1^3),(3,2^2,1^2)\}$
e $\kappa^{(2,1^2)}_{(4,3,1^2)\setminus(3,2)} = 2$. *Desta forma concluímos que*

$$\begin{array}{rl} W(3,2)\otimes W(2,1^2) \cong & W(5,3,1)\oplus W(5,2,1^2)\oplus W(4^2,1)\oplus W(4,3,2)\oplus 2W(4,3,1^2)\oplus \\ & W(4,2^2,1)\oplus W(4,2,1^3)\oplus W(3^2,2,1)\oplus W(3^2,1^3)\oplus W(3,2^2,1^2) \end{array}.$$

Observação 1.11. *Note que no cálculo do Teorema 1.10 não está levando em consideração em quantas partes a partição é feita. Se considerarmos este fato, então assumiremos que* $W_m(\lambda) = 0$ *se* $\lambda_{m+1} \neq 0$. *Nesta situação o Exemplo 1.23 ficaria desta forma*

$$\begin{array}{rl} W_4(3,2)\otimes W_4(2,1^2) \cong & W_4(5,3,1)\oplus W_4(5,2,1^2)\oplus W_4(4^2,1)\oplus W_4(4,3,2)\oplus 2W_4(4,3,1^2)\oplus \\ & W_4(4,2^2,1)\oplus W_4(3^2,2,1) \end{array}.$$

Proposição 1.17. *(i)* $(W_1\oplus\cdots\oplus W_k)^{\otimes_s q} = \bigoplus_{q_1+\cdots+q_k=q} W_1^{\otimes_s q_1}\otimes\cdots\otimes W_k^{\otimes_s q_k}$.

(ii) $W_d(p)\otimes_s W_d(p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{p}{2}} W_d(2p-2k,2k)$.

(iii) $W_d(1^p)\otimes_s W_d(1^p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{p}{2}} W_d(2^{p-2k},1^{4k})$.

Exemplo 1.24. *Além da Regra de Littlewood-Richardson e da Proposição 1.17, num dado momento será necessário conhecer a decomposição de* $W_3(2^2)\otimes_s W_3(2^2)$ *que não pode ser*

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 18 – $T_{(3,2^2,1^2)\setminus(3,2)}$.

computada pelas ferramentas que dispomos. Entretanto podemos calcular essa decomposição de outro modo. Note que $W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2) \subset W_3(2^2) \otimes W_3(2^2) \cong W_3(4^2) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(4,2^2)$. *Então*

$$W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2) \cong \xi_1 W_3(4^2) \oplus \xi_2 W_3(4,3,1) \oplus \xi_3 W_3(4,2^2),$$

onde $\xi_i \in \{0,1\}$ *para* $i \in \{1,2,3\}$. *Da decomposição de* $W_3(2^2) \otimes W_3(2^2)$ *sabemos que* $Hilb\left(W_3(2^2) \otimes W_3(2^2), t_1, t_2, t_3\right) = S_{(4^2)}(t_1,t_2,t_3) + S_{(4,3,1)}(t_1,t_2,t_3) + S_{(4,2^2)}(t_1,t_2,t_3)$. *Como a série de Hilbert de* $W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2)$ *contém um fator* $t_1^4 t_2^4$ *e* $S_{(4^2)}(t_1,t_2,t_3)$ *é a única função de Schur entre* $S_{(4^2)}(t_1,t_2,t_3)$, $S_{(4,3,1)}(t_1,t_2,t_3)$ *e* $S_{(4,2^2)}(t_1,t_2,t_3)$ *que contém* $t_1^4 t_2^4$, *isto implica que* $W_3(4^2)$ *participa da decomposição de* $W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2)$, *logo* $\xi_1 = 1$. *Finalmente, nós aplicaremos argumentos que levam em conta as dimensões:*

$$dim\left(W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2)\right) = dim\left(W_3(4^2)\right) + \xi_2 dim\left(W_3(4,3,1)\right) + \xi_3 dim\left(W_3(4,2^2)\right).$$

Uma vez que

$$dim\left(W_3(2^2)\right) = 6, \qquad dim\left(W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2)\right) = \binom{6+1}{2} = 21,$$
$$dim\left(W_3(4^2)\right) = dim\left(W_3(4,3,1)\right) = 15, \qquad dim\left(W_3(4,2^2)\right) = 6,$$

e obtemos que a única possibilidade é $\xi_2 = 0$ *e* $\xi_3 = 1$, *logo*

$$W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2) \cong W_3(4^2) \oplus W_3(4,2^2).$$

2 Teoria de Invariantes

Agora introduziremos o conceito de invariantes algébricos, este tema pode ser visto na referência [8], Capítulo 5. Nesta teoria existem dois teoremas principais: o primeiro teorema fundamental dos invariantes que tem por objetivo nos dizer quem são os geradores da álgebra dos invariantes, e o segundo teorema fundamental dos invariantes que fornece as relações de definição entre os geradores desta álgebra. Em um caso particular, aplicado a teoria dos invariantes de matrizes, veremos que uma álgebra de invariantes específica será isomorfa a uma estrutura que será bastante importante quando estudarmos o resultado principal desta dissertação, a álgebra traço. Começaremos com uma observação que estabilizará uma notação e depois com um exemplo de ação que será bastante importante.

Observação 2.1. *Seja U um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ com base $\{u_1, \ldots, u_m\}$. O conjunto*

$$\mathbb{K}[u_1, \ldots, u_m] = \mathbb{K}[U] = \mathbb{K} \oplus U \oplus S^2(U) \oplus S^3(U) \ldots$$

denotará a álgebra simétrica de U sobre $\mathbb{K}$, que é o anel de polinômios em m variáveis sobre $\mathbb{K}$.

Exemplo 2.1. *Seja V_d um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com base $\{x_1, \ldots, x_d\}$. Dado $g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d1} & \cdots & g_{dd} \end{pmatrix} \in GL_d(\mathbb{K})$, definimos a ação canônica de $GL_d(\mathbb{K})$ em V_d por*

$$g \cdot x_j = g_{1j}x_1 + \cdots + g_{dj}x_d, \; j \in \{1, \ldots, d\}. \tag{2.1}$$

Podemos estender essa ação para a álgebra $\mathbb{K}[V_d]$ da seguinte forma

$$g \cdot (x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = (g \cdot x_{i_1}) \ldots (g \cdot x_{i_n}),$$

onde $g \in GL_d(\mathbb{K})$ e $x_{i_j} \in \{x_1, \ldots, x_d\}$.

Definição 2.1. *Considere a ação em $\mathbb{K}[V_d]$ definida no Exemplo 2.1 e G um subgrupo de $GL_d(\mathbb{K})$, se o polinômio $f(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}[V_d]$ é tal que para qualquer $g \in G$*

$$g \cdot (f(x_1, \ldots, x_d)) = f(x_1, \ldots, x_d),$$

*então este polinômio é chamado de **G-invariante**. O conjunto de todos os polinômios G-invariantes é denotado por $(\mathbb{K}[V_d])^G$.*

Proposição 2.1. *Seja G um subgrupo de $GL_d(\mathbb{K})$.*

(i) $(\mathbb{K}[V_d])^G$ *é uma álgebra, chamada de* ***álgebra dos invariantes***.

(ii) Denotando $S^p(V_d)$ *a p-ésima potência simétrica de* V_d*, sabemos que*

$$\mathbb{K}[V_d] \cong \mathbb{K} \oplus V_d \oplus S(V_d) \oplus S^2(V_d) \oplus \cdots \oplus S^p(V_d) \oplus \ldots$$

Então para $(\mathbb{K}[V_d])^G$ *temos*

$$(\mathbb{K}[V_d])^G \cong \mathbb{K} \oplus (V_d)^G \oplus (S(V_d))^G \oplus \left(S^2(V_d)\right)^G \oplus \cdots \oplus (S^p(V_d))^G \oplus \ldots$$

No que segue iremos denotar por $\Omega_k = \Omega = \mathbb{K}\left[y_{pq}^{(i)} | p, q \in \{1, \ldots, k\}, i \in \mathbb{N}\right]$, a $\mathbb{K}$**-álgebra dos polinômios em infinitas variáveis comutativas** e Ω_{km} a sub-álgebra de Ω_k gerada pelas variáveis $\{y_{pq}^{(i)} | p, q \in \{1, \ldots, k\}, i \in \{1, \ldots, m\}\}$. E ainda, a (p, q)**-matriz elementar** e_{pq} é a matriz que possui 1 na entrada (p, q) e 0 nas demais.

Definição 2.2. *(i) As matrizes de ordem* k *com entradas em* Ω_k

$$y_i = \sum_{p,q=1}^{k} y_{pq}^{(i)} e_{pq}, i \in \mathbb{N},$$

são chamadas de ***matrizes genéricas*** *de ordem* k.

(ii) A álgebra gerada pelas matrizes genéricas de ordem k *será denotada por* R_k *e é chamada de* ***álgebra das matrizes genéricas*** *de ordem* k. R_{km} *denotará a sub-álgebra de* R_k *gerada pelas* m *primeiras matrizes genéricas* $y_1, \ldots, y_m$.

A seguir mostraremos um exemplo que ilustrará a álgebra de invariantes de matrizes.

Exemplo 2.2. *Considere o espaço vetorial* $M_2^{\oplus d} = M_2(\mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus M_2(\mathbb{K})$. *Definimos a ação de* $GL_2(\mathbb{K})$ *em* $M_2^{\oplus d}$ *por* ***conjugação simultânea*** *da seguinte forma, dados* $a = (a_1, \ldots, a_d) \in M_2^{\oplus d}$ *e* $g \in GL_2(\mathbb{K})$*, temos:*

$$g(a) = (ga_1g^{-1}, \ldots, ga_dg^{-1}).$$

Sabemos que $dim(M_2^{\oplus d}) = 4d$*, logo como também temos, por definição,* $4d$ *geradores para a álgebra* Ω_{2d} *segue que* $\mathbb{K}\left[M_2^{\oplus d}\right] \cong \Omega_{2d}$. *Em* Ω_{2d} *podemos estender a ação por conjugação da seguinte forma, dado* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$, *temos*

$$gy_jg^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d(ay_{11}^{(j)} + by_{21}^{(j)}) - c(ay_{12}^{(j)} + by_{22}^{(j)})}{ad - bc} & \dfrac{-b(ay_{11}^{(j)} + by_{21}^{(j)}) + a(ay_{12}^{(j)} by_{22}^{(j)})}{ad - bc} \\ \dfrac{d(cy_{11}^{(j)} + dy_{21}^{(j)}) - c(cy_{21}^{(j)} + dy_{22}^{(j)})}{ad - bc} & \dfrac{-b(cy_{11}^{(j)} + dy_{21}^{(j)}) + a(cy_{12}^{(j)} + dy_{22}^{(j)})}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

E a ação de g *nas variáveis comutativas fica definida como*

$$g(y_{11}^{(j)}) = \frac{d(ay_{11}^{(j)} + by_{21}^{(j)}) - c(ay_{12}^{(j)} + by_{22}^{(j)})}{ad - bc}.$$

$$g(y_{12}^{(j)}) = \frac{-b(ay_{11}^{(j)} + by_{21}^{(j)}) + a(ay_{12}^{(j)}by_{22}^{(j)})}{ad - bc}.$$

$$g(y_{21}^{(j)}) = \frac{d(cy_{11}^{(j)} + dy_{21}^{(j)}) - c(cy_{21}^{(j)} + dy_{22}^{(j)})}{ad - bc}.$$

$$g(y_{22}^{(j)}) = \frac{-b(cy_{11}^{(j)} + dy_{21}^{(j)}) + a(cy_{12}^{(j)} + dy_{22}^{(j)})}{ad - bc}.$$

Com essas ações que foram definidas é fácil observar que $\left(\mathbb{K}\left[M_2^{\oplus d}\right]\right)^G \cong (\Omega_{2d})^G$*, para* $G < GL_2(\mathbb{K})$*. Esse raciocínio foi feito para matrizes de ordem 2, mas podemos ver, analogamente, para o caso de uma ordem* k *qualquer, basta definirmos*

$$z_j = \sum_{p,q=1}^{k} z_{pq}^{(j)} e_{pq} = g\left(\sum_{p,q=1}^{k} y_{pq}^{(j)} e_{pq}\right) g^{-1} = g y_j g^{-1},$$

onde $z_{pq}^{(j)}$ *é uma combinação linear de* $y_{pq}^{(j)}$*. Logo*

$$g \cdot y_{pq}^{(j)} = z_{pq}^{(j)}, p, q \in \{1, \ldots, k\} \text{ e } j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Então $\left(\mathbb{K}\left[M_k^{\oplus d}\right]\right)^G \cong (\Omega_{kd})^G$*. Chamaremos* $\left(\mathbb{K}\left[M_k^{\oplus d}\right]\right)^{GL_k(\mathbb{K})}$ *de álgebra de invariantes de* d *matrizes de ordem* k*, ou simplesmente de álgebra de invariantes de matrizes.*

Definição 2.3. *A* ***álgebra traço*** C_n *é a sub-álgebra unitária de* Ω_n *gerada por todos os traços de produtos de matrizes genéricas do tipo*

$$tr\left(y_{i_1} \ldots y_{i_m}\right), i_j, m \in \mathbb{N}.$$

Agora, C_{nd} *é a sub-álgebra unitária de* Ω_{nd} *gerada por todos os traços de produtos das* d *primeiras matrizes genéricas.*

O próximo teorema é um caso particular do primeiro teorema fundamental dos invariantes aplicado à álgebra de invariantes de matrizes. Este teorema pode ser visto em [10].

Teorema 2.1 (Primeiro Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes)**.** *A álgebra de invariantes* $(\Omega_{nd})^{GL_n(\mathbb{K})}$ *do Exemplo 2.2 é isomorfa à álgebra traço* C_{nd}*.*

Note que o Primeiro Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes nos dá que a álgebra de invariantes $(\Omega_{nd})^{GL_n(\mathbb{K})}$ é gerada por todos os traços de produtos das d primeiras matrizes genéricas, ou seja, $tr\left(y_{i_1} \ldots y_{i_m}\right)$ com $i_j \in \{1, \ldots, d\}$ e m um inteiro positivo qualquer, ao qual damos o nome de grau de $tr\left(y_{i_1} \ldots y_{i_m}\right)$. Uma das perguntas naturais que surge é se existe uma cota superior para o grau dos traços das matrizes genéricas que geram C_{nd}. Afim de responder essa pergunta os seguintes resultados foram obtidos.

Teorema 2.2 (Teorema de Nagata-Higman)**.** *Se a álgebra (não-unitária e não-comutativa) R é tal que $r^n = 0$ para todo $r \in R$, então R é nilpotente, isto é, existe um inteiro positivo $N = N(n)$ com $r_1 \dots r_N = 0$, para todo $r_1, \dots, r_N \in R$.*

A classe de nilpotência $N(n)$ do Teorema de Nagata-Higman está relacionada da seguinte maneira com a teoria de invariantes de matrizes.

Teorema 2.3. *Seja $N(n)$ a classe de nilpotência do Teorema 2.2. Então a álgebra de invariantes $(\Omega_{nd})^{GL_n(\mathbb{K})}$ é gerada por todos os traços $tr\,(y_{i_1} \dots y_{i_m})$ de grau menor, ou igual, a $N(n)$.*

Observação 2.2. *É importante conhecermos o valor exato de $N(n)$ para determinarmos o grau máximo de $tr\,(y_{i_1} \dots y_{i_m})$ que gera $(\Omega_{nd})^{GL_n(\mathbb{K})}$. Os únicos valores exatos de $N(n)$ são*

$$N(1) = 1 \quad N(2) = 3 \quad N(3) = 6 \quad N(4) = 10.$$

O exemplo a seguir mostra como podemos decompor uma matriz genérica.

Exemplo 2.3. *Seja $X_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} & x_{13}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} & x_{23}^{(i)} \\ x_{31}^{(i)} & x_{32}^{(i)} & x_{33}^{(i)} \end{pmatrix}$ uma matriz genérica. Note que podemos decompor essa matriz da seguinte forma*

$$\frac{x_{11}^{(i)} + x_{22}^{(i)} + x_{33}^{(i)}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{2x_{11}^{(i)} - x_{22}^{(i)} - x_{33}^{(i)}}{3} & x_{12}^{(i)} & x_{13}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & \dfrac{-x_{11}^{(i)} + 2x_{22}^{(i)} - x_{33}^{(i)}}{3} & x_{23}^{(i)} \\ x_{31}^{(i)} & x_{32}^{(i)} & \dfrac{-x_{11}^{(i)} - x_{22}^{(i)} + 2x_{33}^{(i)}}{3} \end{pmatrix},$$

ou seja, $X_i = \dfrac{tr\,(X_i)}{3} e + x_i$, onde $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ é a matriz identidade 3×3 e x_i uma matriz genérica de traço nulo. De modo mais geral podemos ver que dada X_i uma matriz genérica de ordem k, podemos decompô-la como $X_i = \dfrac{tr\,(X_i)}{k} e + x_i$, onde $e = \sum_{j=1}^{k} e_{jj}$ é a matriz identidade $k \times k$ e x_i uma matriz genérica de ordem k com traço nulo.

Definição 2.4. *Usando as noções do Exemplo 2.3, definimos C_{k0} como a álgebra gerada pelos traços de produtos de matrizes do tipo x_i. Quando não houver confusão sobre a ordem das matrizes escreveremos apenas C_0. Por um processo que pode ser visto em [16] p. 251, podemos assumir que (exemplificando o caso das matrizes de ordem 3)*

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}^{(1)} \end{pmatrix}, x_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} & x_{13}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} & x_{23}^{(i)} \\ x_{31}^{(i)} & x_{32}^{(i)} & -\left(x_{11}^{(i)} + x_{22}^{(i)}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Proposição 2.2. *Considerando o Exemplo 2.3, temos que*

$$C_{3d} \cong \mathbb{K}\left[tr\left(X_1\right), \ldots, tr\left(X_d\right)\right] \otimes C_0.$$

Demonstração. Sabemos que uma matriz genérica possui uma decomposição do tipo $X = \dfrac{1}{3}tr(X)e + x$, onde e é a matriz identidade e x uma matriz de traço nulo. Se $X_1, \ldots, X_d$ são as d matrizes genéricas cujos traços de produtos geram C_{3d} a ideia da demonstração é observar que

$$\begin{gathered} tr\left(X_{i_1}X_{i_2}\right) = tr\left(\left(\frac{1}{3}tr(X_{i_1})e + x_{i_1}\right)\left(\frac{1}{3}tr(X_{i_2})e + x_{i_2}\right)\right) = \\ tr\left(\frac{1}{9}tr(X_{i_1})tr(X_{i_2})e + \frac{1}{3}tr(X_{i_1})x_{i_2} + \frac{1}{3}tr(X_{i_2})x_{i_1} + x_{i_1}x_{i_2}\right) = \\ \frac{1}{3}tr(X_{i_1})tr(X_{i_2}) + tr(x_{i_1}x_{i_2}), \end{gathered}$$

e

$$\begin{gathered} tr\left(X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}\right) = \\ tr\left(\left(\frac{1}{9}tr(X_{i_1})tr(X_{i_2})e + \frac{1}{3}tr(X_{i_1})x_{i_2} + \frac{1}{3}tr(X_{i_2})x_{i_1} + x_{i_1}x_{i_2}\right)\left(\frac{1}{3}tr(X_{i_3})e + x_{i_3}\right)\right) = \\ \frac{1}{9}tr(X_{i_1})tr(X_{i_2})tr(X_{i_3}) + \frac{1}{3}tr(X_{i_1})tr(x_{i_2}x_{i_3}) + \\ \frac{1}{3}tr(X_{i_2})tr(x_{i_1}x_{i_3}) + \frac{1}{3}tr(X_{i_3})tr(x_{i_1}x_{i_2}) + tr(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}) \end{gathered}.$$

Ou seja

$$tr(X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_k}) = \sum 3^{1-t}tr(X_{h_1})tr(X_{h_2})\ldots tr(X_{h_t})tr(x_{j_{t+1}}x_{j_{t+2}}\ldots x_{j_k}),$$

onde a soma percorre as k-uplas $(h_1, \ldots, h_t, j_{t+1}, \ldots, j_k)$ que são permutações de $(i_1, \ldots, i_k)$. Logo podemos ver como um elemento de C_{3d} se escreve em $\mathbb{K}\left[tr\left(X_1\right), \ldots, tr\left(X_d\right)\right] \otimes C_0$. □

Existem dois teoremas fundamentais na teoria dos invariantes, um já foi apresentado que é o Primeiro Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes (Teorema 2.1) que nos dá quem são os geradores da álgebra dos invariantes $\left(\mathbb{K}\left[M_n^{\oplus d}\right]\right)^{GL_n(\mathbb{K})}$, o outro é o Segundo Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes que tem como objetivo nos fornecer uma descrição das relações de definição da álgebra dos invariantes.

Definição 2.5. *Para $\sigma \in S_n$ escreva ela como produto de ciclos disjuntos da seguinte maneira*

$$\sigma = \left(i_1^{(1)} \ldots i_{p_1}^{(1)}\right) \ldots \left(i_1^{(k)} \ldots i_{p_k}^{(k)}\right),$$

onde também estão inclusos os 1-ciclos, ou seja, $1, \ldots, n$ aparecem exatamente uma vez nesta decomposição. Defina

$$tr_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = tr\left(x_{i_1^{(1)}} \ldots x_{i_{p_1}^{(1)}}\right) \ldots tr\left(x_{i_1^{(k)}} \ldots x_{i_{p_k}^{(k)}}\right)$$

Teorema 2.4 (Segundo Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes)**.** *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma tr_\sigma(x_1, \ldots, x_n), \alpha_\sigma \in \mathbb{K},$$

um polinômio. Então $f = 0$ é uma relação de definição para a álgebra matricial $M_k(\mathbb{K})$, isto é, $f(A_1, \ldots, A_n) = 0$ para todo $A_1, \ldots, A_n \in M_k(\mathbb{K})$ se, e somente se, $\sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma$ pertence ao ideal da álgebra de grupo $\mathbb{K}S_n$ gerado pelo elemento $\sum\limits_{\sigma \in S_{k+1}} (sign(\sigma))\sigma$.

O Segundo Teorema Fundamental pode ser consulltado em [8], p.63.

3 Resultado Principal

Explicitar um conjunto mínimo dos geradores de C_{nd} e as relações de definição entre eles (que seriam o Primeiro e o Segundo Teorema Fundamental dos Invariantes de Matrizes) foi feito apenas em alguns casos. Em [1] Abeasis e Pittaluga encontraram um sistema de geradores de C_{3d}, para todo $d \geqslant 2$, em termos da teoria de representação do grupo linear geral e simétrico. Com base nesses geradores vamos mostrar que o grau mínimo do conjunto das relações de definição de C_{3d} é igual a 7 para todo $d \geqslant 3$, e mais, para $d = 3$ encontraremos relações de definição de grau 8 para C_{33}.

Pelo Teorema 2.3 e pela Observação 2.2 sabemos que a álgebra C_{3d} possui um sistema de geradores de grau $\leqslant 6$. Sem perda de generalidade assumiremos que este sistema consiste de traços de produtos $tr\,(X_{i_1}\dots X_{i_k})$. Seja U_k a subálgebra de C_{3d} gerada por todos os traços $tr\,(X_{i_1}\dots X_{i_\ell})$ de grau $\ell \leqslant k$. Claramente, U_k é também um GL_d-submódulo de C_{3d}. Considere $C_{3d}^{(k+1)}$ a componente homogênea de grau $k+1$ de C_{3d}. Então a interseção $U_k \cap C_{3d}^{(k+1)}$ é um GL_d-módulo e possui um complemento G_{k+1} em $C_{3d}^{(k+1)}$, que é o GL_d-módulo dos "novos" geradores de grau $k+1$. Nós assumiremos que G_{k+1} é um submódulo de GL_d-módulo gerado pelos traços de produtos $tr\left(X_{i_1}\dots X_{i_{k+1}}\right)$ de grau $k+1$. O **GL_d-módulo dos geradores de** C_{3d} é

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_6.$$

Inicialmente vamos decompor o GL_d-módulo dos geradores de C_{3d} em representações polinomiais irredutíveis e calcular suas dimensões.

Proposição 3.1. *O GL_d-módulo G dos geradores de C_{3d} se decompõe como*

$$G = [W(1)] \oplus [W(2)] \oplus \left[W(3) \oplus W(1^3)\right] \oplus \left[W(2^2) \oplus W(2,1^2)\right] \oplus$$

$$\oplus \left[W(3,1^2) \oplus W(2^2,1) \oplus W(1^5)\right] \oplus \left[W(3^2) \oplus W(3,1^3)\right].$$

Onde $G_1 = W(1)$, $G_2 = W(2)$, $G_3 = W(3) \oplus W(1^3)$, $G_4 = W(2^2) \oplus W(2,1^2)$, $G_5 = W(3,1^2) \oplus W(2^2,1) \oplus W(1^5)$ e $G_6 = W(3^2) \oplus W(3,1^3)$. Cada $W(\lambda) \subset G$ tem um gerador "canônico" $tr\,(w_\lambda\,(X_1,\dots,X_d))$, onde w_λ está definido no Teorema 1.9.

Demonstração. Esta decomposição está feita em [1]. Devemos prestar atenção que a notação utilizada para os diagramas de Young é o inverso do que estamos usando aqui. □

Corolário 3.1. *Os números g_k de geradores de grau $k \leqslant 6$ em qualquer sistema mínimo de geradores de C_{3d} são*

$g_1 = d,\ g_2 = \dfrac{1}{2}(d+1)d,\ g_3 = \dfrac{1}{3}d(d^2+2),\ g_4 = \dfrac{1}{24}(d+1)d(d-1)(5d-6),$ $g_5 = \dfrac{1}{30}d(d-1)(d-2)(3d^2+4d+6),\ g_6 = \dfrac{1}{48}(d+2)(d+1)d(d-1)(d^2-3d+4).$ O número total de geradores é

$$g = g(d) = \frac{1}{240}d(5d^5 + 19d^4 - 5d^3 + 65d^2 + 636).$$

Demonstração. O número g_k é igual a dimensão do GL_d-submódulo G_k do GL_d-módulo G dos geradores de C_{3d}. Aplicando a Proposição 1.16 em cada módulo $W(\lambda)$ da decomposição de G que foi dado na Proposição 3.1 e usando que

$$\begin{aligned}
g_1 &= dim\,(G_1) = dim\,(W(1))\,,\\
g_2 &= dim\,(G_2) = dim\,(W(2))\,,\\
g_3 &= dim\,(G_3) = dim\,(W(3)) + dim\left(W(1^3)\right),\\
g_4 &= dim\,(G_4) = dim\left(W(2^2)\right) + dim\left(W(2,1^2)\right),\\
g_5 &= dim\,(G_5) = dim\left(W(3,1^2)\right) + dim\left(W(2^2,1)\right) + dim\left(W(1^5)\right),\\
g_6 &= dim\,(G_6) = dim\left(W(3^2)\right) + dim\left(W(3,1^3)\right),
\end{aligned}$$

teremos o resultado desejado. A efeito de exemplo calculemos $dim\left(W(3^2)\right)$. Sabemos que

$$dim\left(W(3^2)\right) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i},$$

onde $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_k = 0$ para $k \in \{3, \ldots, d\}$.

$$\begin{aligned}
i = 1 \quad & \prod_{1<j\leqslant d} \frac{\lambda_1 - \lambda_j + j - 1}{j-1} = \prod_{1<j\leqslant d} \frac{3 - \lambda_j + j - 1}{j-1} = \prod_{1<j\leqslant d} \frac{2 - \lambda_j + j}{j-1} = \\
& \left(\frac{2-\lambda_2+2}{2-1}\right)\left(\prod_{2<j\leqslant d} \frac{2-\lambda_j+j}{j-1}\right) = \left(\frac{4-3}{1}\right)\left(\prod_{3\leqslant j\leqslant d} \frac{j+2}{j-1}\right) = \\
& \left(\frac{3+2}{3-1}\right)\left(\frac{4+2}{4-1}\right)\cdots\left(\frac{d-1+2}{d-1-1}\right)\left(\frac{d+2}{d-1}\right) = \frac{5}{2}\frac{6}{3}\cdots\frac{d+1}{d-1}\frac{d+2}{d-1} = \frac{\frac{(d+2)!}{4!}}{(d-1)!} = \\
& \frac{(d+2)!}{4!(d-1)!} \Rightarrow \prod_{1<j\leqslant d} \frac{\lambda_1 - \lambda_j + j - 1}{j-1} = \frac{(d+2)!}{4!(d-1)!}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i = 2 \quad & \prod_{2<j\leqslant d} \frac{\lambda_2 - \lambda_j + j - 2}{j-2} = \prod_{2<j\leqslant d} \frac{3 - \lambda_j + j - 2}{j-2} = \prod_{3\leqslant j\leqslant d} \frac{1 - \lambda_j + j}{j-2} = \prod_{3\leqslant j\leqslant d} \frac{j+1}{j-2} = \\
& \frac{\frac{(d+1)!}{3!}}{(d-2)!} = \frac{(d+1)!}{3!(d-2)!} \Rightarrow \prod_{2<j\leqslant d} \frac{\lambda_2 - \lambda_j + j - 2}{j-2} = \frac{(d+1)!}{3!(d-2)!}.
\end{aligned}$$

$$i \geqslant 3 \quad \prod_{3\leqslant i<j\leqslant d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i} = \prod_{3\leqslant i<j\leqslant d} \frac{j-i}{j-i} = 1.$$

Logo

$$dim\left(W(3^2)\right) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i} =$$

$$\left(\prod_{1<j\leqslant d} \frac{\lambda_1 - \lambda_j + j - 1}{j-1}\right)\left(\prod_{2<j\leqslant d} \frac{\lambda_2 - \lambda_j + j - 2}{j-2}\right)\left(\prod_{3\leqslant i<j\leqslant d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}\right) = .$$

$$\left(\frac{(d+2)!}{4!(d-1)!}\right)\left(\frac{(d+1)!}{3!(d-2)!}\right)1 = \frac{1}{3}\left(\frac{(d+2)!}{4!(d-2)!}\right)\left(\frac{(d+1)!}{2!(d-1)!}\right) = \frac{1}{3}\binom{d+2}{4}\binom{d+1}{2}$$

As demais dimensões são calculadas de maneira análoga e valem

$$\begin{aligned}
&dim\left(W(1)\right) = d, && dim\left(W(2)\right) = \binom{d+1}{2},\\
&dim\left(W(3)\right) = \binom{d+2}{3}, && dim\left(W(1^3)\right) = \binom{d}{3},\\
&dim\left(W(2^2)\right) = \frac{d}{2}\binom{d+1}{3}, && dim\left(W(2,1^2)\right) = 3\binom{d+1}{4},\\
&dim\left(W(3,1^2)\right) = 6\binom{d+2}{5}, && dim\left(W(2^2,1)\right) = d\binom{d+1}{4},\\
&dim\left(W(1^5)\right) = \binom{d}{5}, && dim\left(W(3,1^3)\right) = 10\binom{d+2}{6}.
\end{aligned}$$

□

Veremos agora que podemos analisar as realções de definição de C_0 no lugar de C_{3d}, e que estas relações de deifinição estão contidas no quadrado de um ideal de aumento.

Observação 3.1. *Da Proposição 2.2 temos que* $C_{3d} \cong \mathbb{K}\left[tr\left(X_1\right), \ldots, tr\left(X_d\right)\right] \otimes C_0$*, logo* C_0 *pode ser visto como uma subálgebra de* C_{3d}*. Desta forma podemos dizer de* C_0 *é gerado por traços de produtos de matrizes genéricas com traço nulo de grau menor, ou igual, a 6. Dos Corolários 1.1 e 3.1 temos que*

$$C_{3d} \cong \frac{\mathbb{K}\left[z_1, \ldots, z_g\right]}{I}.$$

Uma vez que $K\left[tr\left(X_1\right), \ldots, tr\left(X_d\right)\right]$ *tem* $g_1 = d$ *geradores, segue que* C_0 *possui* $h = g_2 + \cdots + g_6$ *geradores, ou seja, o* GL_d*-módulo dos geradores de* C_0 *é* $G_2 \oplus \cdots \oplus G_6$*, logo*

$$C_0 \cong \frac{\mathbb{K}\left[z_1, \ldots, z_h\right]}{J}.$$

Desta forma

$$\frac{\mathbb{K}\left[z_1, \ldots, z_g\right]}{I} \cong C_{3d} \cong \mathbb{K}\left[tr\left(X_1\right), \ldots, tr\left(X_d\right)\right] \otimes C_0 \cong \frac{\mathbb{K}\left[tr\left(X_1\right), \ldots, tr\left(X_d\right)\right] \otimes \mathbb{K}\left[z_1, \ldots, z_h\right]}{J}.$$

Então concluímos que $I \cong J$*, isto significa que para explicitar as relações de definição de* C_{3d} *é suficiente que sejam dadas as relações de definição de* C_0*. Defina*

$$S := \mathbb{K}\left[G_2 \oplus \cdots \oplus G_6\right],$$

a álgebra simétrica dos geradores de C_0. Uma vez que $G_2 \oplus \cdots \oplus G_6$ possui h geradores, temos $\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_h] \cong \mathbb{K}[G_2 \oplus \cdots \oplus G_6]$, logo o conjunto J das relações de definição de C_0 é o núcleo do isomorfismo natural $S \longrightarrow C_0$.

Proposição 3.2. *Usando as notações da Observação 3.1, o conjunto das relações de definição da álgebra C_0 está contido no quadrado do ideal de aumento de S*

$$J \subset \omega^2(S).$$

Demonstração. Seja $\{f_1, \ldots, f_h\}$ um sistema mínimo de geradores homogêneos de C_0, então $\{f_1 + \omega^2(C_0), \ldots, f_h + \omega^2(C_0)\}$ forma uma base para $\omega(C_0)$ módulo $\omega^2(C_0)$, assim do fato de os elementos de uma base serem linearmente independentes temos que

$$\alpha_1 \left(f_1 + \omega^2(C_0)\right) + \cdots + \alpha_h \left(f_h + \omega^2(C_0)\right) = \omega^2(C_0) \Leftrightarrow \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_h f_h \in \omega^2(C_0),$$

só admite a solução trivial, ou seja, não existe uma relação da forma

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_h f_h + u(f_1, \ldots, f_h) = 0,$$

com $u(z_1, \ldots, z_h) \in \omega^2(\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_h])$ e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) \in \mathbb{K}^h \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Logo, se $u(z_1, \ldots, z_h) \in J$ é uma relação de definição de C_0, suponha que $u(z_1, \ldots, z_h) \notin \omega^2(S)$. Então existem $\overline{u}(z_1, \ldots, z_h) \in \omega^2(S)$ e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) \in \mathbb{K}^h \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tais que

$$\begin{array}{c} u(z_1, \ldots, z_h) = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_h z_h + \overline{u}(z_1, \ldots, z_h) \Rightarrow \\ \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_h f_h + \overline{u}(f_1, \ldots, f_h) = u(f_1, \ldots, f_h) = 0 \end{array}.$$

□

Uma vez que as relações de definição da álgebra C_0 estão em $\omega^2(S)$ é interessante que conheçamos melhor $\omega^2(S)$. Para isso devemos decompor as componentes homogêneas $\left(\omega^2(S)\right)^{(k)}$ de $\omega^2(S)$, em especial a de grau $k = 7$ e quando $d = 3$ também a de grau $k = 8$.

Lema 3.1. *Os seguintes isomorfismos de GL_d-módulos são válidos:*

$$W(2) \otimes_s W(2) \cong W(4) \oplus W(2^2), \tag{3.1}$$

$$W(2) \otimes W(3) \cong W(5) \oplus W(4,1) \oplus W(3,2), \tag{3.2}$$

$$W(2) \otimes W(1^3) \cong W(3,1^2) \oplus W(2,1^3), \tag{3.3}$$

$$W(2) \otimes W(2^2) \cong W(4,2) \oplus W(3,2,1) \oplus W(2^3), \tag{3.4}$$

$$W(2) \otimes W(2,1^2) \cong W(4,1^2) \oplus W(3,2,1) \oplus W(3,1^3) \oplus W(2^2,1^2), \tag{3.5}$$

$$W(3) \otimes_s W(3) \cong W(6) \oplus W(4,2), \tag{3.6}$$

$$W(3) \otimes W(1^3) \cong W(4,1^2) \oplus W(3,1^3), \tag{3.7}$$

$$W(1^3) \otimes_s W(1^3) \cong W(2^3) \oplus W(2,1^4), \tag{3.8}$$

$$W(2) \otimes_s W(2) \otimes_s W(2) \cong W(6) \oplus W(4,2) \oplus W(2^3), \tag{3.9}$$

$$W(2) \otimes W(3,1^2) \cong W(5,1^2) \oplus W(4,2,1) \oplus W(4,1^3) \oplus W(3^2,1) \oplus W(3,2,1^2), \tag{3.10}$$

$$W(2) \otimes W(2^2,1) \cong W(4,2,1) \oplus W(3,2^2) \oplus W(3,2,1^2) \oplus W(2^3,1), \tag{3.11}$$

$$W(2) \otimes W(1^5) \cong W(3,1^4) \oplus W(2,1^5), \tag{3.12}$$

$$W(3) \otimes W(2^2) \cong W(5,2) \oplus W(4,2,1) \oplus W(3,2^2), \tag{3.13}$$

$$W(1^3) \otimes W(2^2) \cong W(3^2,1) \oplus W(3,2,1^2) \oplus W(2^2,1^3), \tag{3.14}$$

$$W(3) \otimes W(2,1^2) \cong W(5,1^2) \oplus W(4,2,1) \oplus W(4,1^3) \oplus W(3,2,1^2), \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} W(1^3) \otimes W(2,1^2) \cong\ & W(3,2^2) \oplus W(3,2,1^2) \oplus W(3,1^4) \oplus \\ & W(2^3,1) \oplus W(2^2,1^3) \oplus W(2,1^5), \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} (W(2) \otimes_s W(2)) \otimes W(3) \cong\ & W(7) \oplus W(6,1) \oplus 2W(5,2) \oplus \\ & W(4,3) \oplus W(4,2,1) \oplus W(3,2^2), \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} (W(2) \otimes_s W(2)) \otimes W(1^3) \cong\ & W(5,1^2) \oplus W(4,1^3) \oplus W(3^2,1) \oplus \\ & W(3,2,1^2) \otimes W(2^2,1^3). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Demonstração. As equações (3.2) a (3.5), (3.7) e (3.10) a (3.16) são consequências imediatas da Regra de Littlewood-Richardson que apresentamos no primeiro capítulo desta dissertação e o cálculo é feito como foi mostrado no Exemplo 1.23. Já as equações (3.1), (3.6) e (3.8) são obtidas a partir da Proposição 1.17. Agora as equações (3.17) e (3.18) resultam de uma combinação do Teorema 1.10 e da Proposição 1.17. Para ilustrar a demonstração vejamos como é obtida a equação (3.18). Pela Proposição 1.17 temos que

$$W(2) \otimes_s W(2) \cong \sum_{0 \leqslant k \leqslant 1} W(4-2k, 2k) = W(4) \oplus W(2,2).$$

Assim $(W(2) \otimes_s W(2)) \otimes W(1^3) \cong \big(W(4) \oplus W(2^2)\big) \otimes W(1^3) = \big(W(4) \otimes W(1^3)\big) \oplus \big(W(2^2) \otimes W(1^3)\big)$. Agora vamos aplicar a Regra de Littlewood-Richardson a $W(4) \otimes W(1^3)$ e $W(2^2) \otimes W(1^3)$. As $\nu \setminus (4)$-skew-tabelas (com $\nu \geqslant (4)$ e $\nu \vdash 7$) de conteúdo $(1,1,1)$ tal que a sequência formada pelos números que preenchem $[\nu \setminus (4)]$, na ordem que estão da direita para a esquerda e depois para baixo, estão em rede são

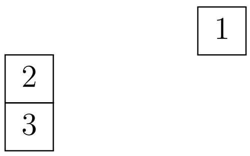


Figura 19 – $T_{(5,1^2) \setminus (4)}$

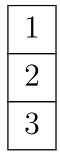


Figura 20 – $T_{(4,1^3) \setminus (4)}$

Logo $W(4) \otimes W(1^3) \cong W(5,1^2) \oplus W(4,1^2)$. Já as $\nu \setminus (2^2)$-skew-tabelas com as características citadas acima, mas de conteúdo $(1,1,1)$, são

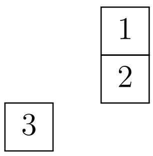


Figura 21 – $T_{(3^2,1) \setminus (2^2)}$

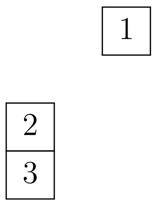


Figura 22 – $T_{(3,2,1^2) \setminus (2^2)}$

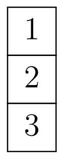


Figura 23 – $T_{(2^2,1^3) \setminus (2^2)}$

E então $W(2^2) \otimes W(1^3) \cong W(3^2,1) \oplus W(3,2,1^2) \oplus W(2^2,1^3)$. Portanto

$$\begin{aligned}(W(2) \otimes_s W(2)) \otimes W(1^3) \cong\ & W(5,1^2) \oplus W(4,1^3) \oplus W(3^2,1) \oplus \\ & W(3,2,1^2) \otimes W(2^2,1^3).\end{aligned}$$

□

Proposição 3.3. *As componentes homogêneas* $\big(\omega^2(S)\big)^{(k)}$ *de grau* $k \leqslant 7$ *da potência quadrada* $\omega^2(S)$ *do ideal de aumento da álgebra simétrica de* $G_2 \oplus \cdots \oplus G_6$ *se decompõe como*

$$\big(\omega^2(S)\big)^{(4)} \cong W(4) \oplus W(2^2),$$

$$\big(\omega^2(S)\big)^{(5)} \cong W(5) \oplus W(4,1) \oplus W(3,2) \oplus W(3,1^2) \oplus W(2,1^3),$$

$$\begin{aligned}\big(\omega^2(S)\big)^{(6)} \cong\ & 2W(6) \oplus 3W(4,2) \oplus 2W(4,1^2) \oplus 2W(3,2,1) \oplus \\ & 2W(3,1^3) \oplus 3W(2^3) \oplus W(2^2,1^2) \oplus W(2,1^4),\end{aligned}$$

$$\left(\omega^2(S)\right)^{(7)} \cong W(7) \oplus W(6,1) \oplus 3W(5,2) \oplus 3W(5,1^2) \oplus W(4,3) \oplus 5W(4,2,1) \oplus 3W(4,1^3) \oplus 3W(3^2,1) \oplus 4W(3,2^2) \oplus 6W(3,2,1^2) \oplus 2W(3,1^4) \oplus 2W(2^3,1) \oplus 3W(2^2,1^3) \oplus 2W(2,1^5).$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$(G_2 \oplus \cdots \oplus G_6)^{\otimes_s k} = \sum G_2^{\otimes_s q_2} \otimes \cdots \otimes G_6^{\otimes_s q_6},$$

onde a soma percorre todas as 5-uplas de inteiros não-negativos $(q_2, \ldots, q_6)$ tais que $\sum_{j=2}^{6} jq_j = k$, pois G_j é uma componente homogênea de grau j. Logo temos que

$$S = \mathbb{K} \oplus (G_2 \oplus \cdots \oplus G_6) \oplus (G_2 \oplus \cdots \oplus G_6)^{\otimes_s 2} \oplus \cdots \oplus (G_2 \oplus \cdots \oplus G_6)^{\otimes_s k} \oplus \cdots \Rightarrow$$
$$\omega^2(S) = (G_2 \oplus \cdots \oplus G_6)^{\otimes_s 2} \oplus \cdots \oplus (G_2 \oplus \cdots \oplus G_6)^{\otimes_s k} \oplus \cdots =$$
$$\sum_{2q_2^{(2)}+\cdots+6q_6^{(2)}=2} G_2^{\otimes_s q_2^{(2)}} \otimes \cdots \otimes G_6^{\otimes_s q_6^{(2)}} \oplus \cdots \oplus \sum_{2q_2^{(k)}+\cdots+6q_6^{(k)}=k} G_2^{\otimes_s q_2^{(k)}} \otimes \cdots \otimes G_6^{\otimes_s q_6^{(k)}} \oplus \cdots.$$

Ou seja

$$\left(\omega^2(S)\right)^{(k)} = \sum G_2^{\otimes_s q_2} \otimes \cdots \otimes G_6^{\otimes_s q_6}, 2q_2 + \cdots + 6q_6 = k,$$

note também que devemos ter $q_1 + \cdots + q_6 \geqslant 2$, pois caso $q_1 + \cdots + q_6 \in \{0,1\}$ teríamos $\mathbb{K}$ ou G_j na decomposição de $\left(\omega^2(S)\right)^{(k)}$, o que não pode acontecer pela definição de $\omega^2(S)$. Usando a Proposição 3.1, vejamos os casos:

Caso $k < 4$ Neste caso o sistema

$$\begin{cases} 2q_2 + \cdots + 6q_6 = k \\ q_2 + \cdots + q_6 \geqslant 2 \end{cases}$$

não possui solução, logo $\left(\omega^2(S)\right)^{(k)} = 0$ para $k < 4$.

Caso $k = 4$ Usando a equação (3.1) temos

$$\left(\omega^2(S)\right)^{(4)} = G_2 \otimes_s G_2 = W(2) \otimes_s W(2) \cong W(4) \oplus W(2^2).$$

Caso $k = 5$ Das equações (3.2) e (3.3) concluímos que

$$\left(\omega^2(S)\right)^{(5)} = G_2 \otimes G_3 = W(2) \otimes \left(W(3) \oplus W(1^3)\right) = (W(2) \otimes W(3)) \oplus \left(W(2) \otimes W(1^3)\right) \cong W(5) \oplus W(4,1) \oplus W(3,2) \oplus W(3,1^2) \oplus W(2,1^3).$$

Caso $k = 6$ Aplicando a Proposição 1.17, item (i), em $\left(W(3) \oplus W(1^3)\right)^{\otimes_s 2}$ e a partir das equações (3.4) a (3.9) segue que

$$\left(\omega^2(S)\right)^{(6)} = G_2^{\otimes_s 3} \oplus G_2 \otimes G_4 \oplus G_3^{\otimes_s 2} = (W(2) \otimes_s W(2) \otimes_s W(2)) \oplus \left(W(2) \otimes \left(W(2^2) \oplus W(2,1^2)\right)\right) \oplus \left(W(2) \oplus W(1^2)\right)^{\otimes_s 2} =$$

$$(W(2) \otimes_s W(2) \otimes_s W(2)) \oplus \left(W(2) \otimes W(2^2)\right) \oplus \left(W(2) \otimes W(2,1^2)\right) \oplus$$
$$(W(3) \otimes_s W(3)) \oplus \left(W(3) \otimes W(1^3)\right) \oplus \left(W(1^3) \otimes_s W(1^3)\right) \cong W(6) \oplus W(4,2) \oplus$$
$$W(2^3) \oplus W(4,2) \oplus W(3,2,1) \oplus W(2^3) \oplus W(4,1^2) \oplus W(3,2,1) \oplus W(3,1^3) \oplus$$
$$W(2^2,1^2) \oplus W(6) \oplus W(4,2) \oplus W(4,1^2) \oplus W(3,1^3) \oplus W(2^3) \oplus W(2,1^4) = 2W(6) \oplus$$
$$3W(4,2) \oplus 2W(4,1^2) \oplus 2W(3,2,1) \oplus 2W(3,1^3) \oplus 3W(2^3) \oplus W(2^2,1^2) \oplus W(2,1^4).$$

Caso $k = 7$ A partir das equações (3.10) a (3.15), (3.17) e (3.18) temos

$$\left(\omega^2(S)\right)^{(7)} = G_2^{\otimes_s 2} \oplus G_3 \otimes G_5 \oplus G_3 \otimes G_4 = \left((W(2) \otimes_s W(2)) \otimes \left(W(3) \oplus W(1^3)\right)\right)$$
$$\oplus \left(W(2) \otimes \left(W(3,1^2) \oplus W(2^2,1) \oplus W(1^5)\right)\right) \oplus \left(\left(W(3) \oplus W(1^3)\right) \otimes \left(W(2^2) \oplus\right.\right.$$
$$\left.\left.W(2,1^2)\right)\right) = ((W(2) \otimes_s W(2)) \otimes W(3)) \oplus \left((W(2) \otimes_s W(2)) \otimes W(1^3)\right) \oplus (W(2)$$
$$\otimes W(3,1^2)) \oplus \left(W(2) \otimes W(2^2,1)\right) \oplus \left(W(2) \otimes W(1^5)\right) \oplus \left(W(3) \otimes W(2^2)\right) \oplus (W(3)$$
$$\otimes W(2,1^2)) \oplus \left(W(1^3) \otimes W(2^2)\right) \oplus \left(W(1^3) \otimes W(2,1^2)\right) \cong W(7) \oplus W(6,1) \oplus$$
$$2W(5,2) \oplus W(4,3) \oplus W(4,2,1) \oplus W(3,2^2) \oplus W(5,1^2) \oplus W(4,1^3) \oplus W(3^2,1) \oplus$$
$$W(3,2,1^2) \otimes W(2^2,1^3) \oplus W(5,1^2) \oplus W(4,2,1) \oplus W(4,1^3) \oplus W(3^2,1) \oplus$$
$$W(3,2,1^2) \oplus W(4,2,1) \oplus W(3,2^2) \oplus W(3,2,1^2) \oplus W(2^3,1) \oplus W(3,1^4) \oplus$$
$$W(2,1^5) \oplus W(5,2) \oplus W(4,2,1) \oplus W(3,2^2) \oplus W(5,1^2) \oplus W(4,2,1) \oplus W(4,1^3)$$
$$\oplus W(3,2,1^2) \oplus W(3^2,1) \oplus W(3,2,1^2) \oplus W(2^2,1^3) \oplus W(3,2^2) \oplus W(3,2,1^2) \oplus$$
$$W(3,1^4) \oplus W(2^3,1) \oplus W(2^2,1^3) \oplus W(2,1^5) = W(7) \oplus W(6,1) \oplus$$
$$3W(5,2) \oplus 3W(5,1^2) \oplus W(4,3) \oplus 5W(4,2,1) \oplus 3W(4,1^3) \oplus 3W(3^2,1) \oplus$$
$$4W(3,2^2) \oplus 6W(3,2,1^2) \oplus 2W(3,1^4) \oplus 2W(2^3,1) \oplus 3W(2^2,1^3) \oplus 2W(2,1^5).$$

□

Lema 3.2. *Os seguintes isomorfismos de GL_3-módulo são válidos:*

$$\begin{aligned}(W_3(2) \otimes_s W_3(2)) \otimes W_3(2^2) \cong\ & W_3(6,2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4^2) \\ & \oplus W_3(4,3,1) \oplus 2W_3(4,2^2),\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}(W_3(2) \otimes_s W_3(2)) \otimes W_3(2,1^2) \cong\ & W_3(6,1^2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4,3,1) \\ & \oplus W_3(3^2,2),\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$W_3(2) \otimes W_3(3^2) \cong W_3(5,3) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(3^2,2), \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}W_3(2) \otimes (W_3(3) \otimes_s W_3(3)) \cong\ & W_3(8) \oplus W_3(7,1) \oplus 2W_3(6,2) \oplus W_3(5,3) \oplus \\ & W_3(5,2,1) \oplus W_3(4^2) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(4,2^2),\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$W_3(2) \otimes \left(W_3(3) \otimes W_3(1^3)\right) \cong W_3(6,1^2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4,3,1), \tag{3.23}$$

$$W_3(2) \otimes \left(W_3(1^3) \otimes_s W_3(1^3)\right) \cong W_3(4,2^2), \tag{3.24}$$

$$W_3(3) \otimes W_3(3, 1^2) \cong W_3(6, 1^2) \oplus W_3(5, 2, 1) \oplus W_3(4, 3, 1), \tag{3.25}$$

$$W_3(3) \otimes W_3(2^2, 1) \cong W_3(5, 2, 1) \oplus W_3(4, 2^2), \tag{3.26}$$

$$W_3(1^3) \otimes W_3(3, 1^2) \cong W_3(4, 2^2), \tag{3.27}$$

$$W_3(1^3) \otimes W_3(2^2, 1) \cong W_3(3^2, 2), \tag{3.28}$$

$$W_3(2^2) \otimes W_3(2, 1^2) \cong W_3(4, 3, 1) \oplus W_3(3^2, 2), \tag{3.29}$$

$$W_3(4) \otimes_s W_3(4) \cong W_3(8) \oplus W_3(6, 2) \oplus W_3(4^2), \tag{3.30}$$

$$W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2) \cong W_3(4^2) \oplus W_3(4, 2^2), \tag{3.31}$$

$$W_3(2, 1^2) \otimes_s W_3(2, 1^2) \cong W_3(4, 2^2). \tag{3.32}$$

Demonstração. A demonstração é feita de modo análogo à demonstração do Lema 3.1 para as equações (3.19) a (3.30), apenas tomando cuidado para o fato de que $d = 3$ (ver Observação 1.11). Já verificamos a equação (3.31) no Exemplo 1.24. Vejamos a equação (3.32). Pela Regra de Littlewood-Richardson e pela Observação 1.11 temos

$$W_3(1^3) \otimes W_3(1) \cong W_3(2, 1^2).$$

Logo

$$\begin{gathered} W_3(2, 1^2) \otimes_s W_3(2, 1^2) \cong \big(W_3(1^3) \otimes W_3(1)\big) \otimes_s \big(W_3(1^3) \otimes W_3(1)\big) = \\ \big(W_3(1^3) \otimes W_3(1^3)\big) \otimes (W_3(1) \otimes_s W_3(1)) \cong W_3(2^3) \otimes W_3(2) \cong W_3(4, 2^2). \end{gathered}$$

□

Proposição 3.4. *Para $d = 3$ a componente homogênea $\big(\omega^2(S)\big)^{(8)}$ de grau 8 da potência quadrada $\omega^2(S)$ do ideal de aumento de $S = \mathbb{K}\,[G_1 \oplus \cdots \oplus G_6]$ se decompõe como*

$$\begin{aligned} \big(\omega^2(S)\big)^{(8)} \cong\ & 2W_3(8) \oplus W_3(7, 1) \oplus 5W_3(6, 2) \oplus 3W_3(6, 1^2) \oplus 2W_3(5, 3) \oplus 7W_3(5, 2, 1) \\ & \oplus 5W_3(4^2) \oplus 7W_3(4, 3, 1) \oplus 10W_3(4, 2^2) \oplus 4W_3(3^2, 2). \end{aligned}$$

Demonstração. Como visto na demonstração da Proposição 3.3

$$(G_2 \oplus \cdots \oplus G_6)^{\otimes_s k} = \sum G_2^{\otimes_s q_2} \otimes \cdots \otimes G_6^{\otimes_s q_6},$$

onde a soma percorre $2q_2 + \cdots + 6q_6 = k$ e $q_1 + \cdots + q_6 \geqslant 2$, logo

$$\begin{gathered}
\big(\omega^2(S)\big)^{(8)} = G_2^{\otimes_s 4} \oplus \big(G_2^{\otimes_s 2} \otimes G_4\big) \oplus (G_2 \otimes G_6) \oplus \big(G_2 \otimes G_3^{\otimes_s 2}\big) \oplus (G_3 \otimes G_5) \oplus G_4^{\otimes_s 2} = \\
W_3(2)^{\otimes_s 4} \oplus \big(W_3(2)^{\otimes_s 2} \otimes \big(W_3(2^2) \oplus W_3(2,1^2)\big)\big) \oplus \big(W_3(2) \otimes W_3(3^2)\big) \oplus \\
\Big(W_3(2) \otimes \big(W_3(3) \oplus W_3(1^3)\big)^{\otimes_s 2}\Big) \oplus \big(\big(W_3(3) \oplus W_3(1^3)\big) \otimes \big(W_3(3,1^2) \oplus W_3(2^2,1)\big)\big) \oplus \\
\big(W_3(2^2) \oplus W_3(2,1^2)\big)^{\otimes_s 2} = (W_3(2) \otimes_s W_3(2))^{\otimes_s 2} \oplus \big((W_3(2) \otimes_s W_3(2)) \otimes W_3(2^2)\big) \oplus \\
\big((W_3(2) \otimes_s W_3(2)) \otimes W_3(2,1^2)\big) \oplus \big(W_3(2) \otimes W_3(3^2)\big) \oplus (W_3(2) \otimes ((W_3(3) \otimes_s W_3(3)) \oplus \\
\big(W_3(3) \otimes W_3(1^3)\big) \oplus \big(W_3(1^3) \otimes_s W_3(1^3)\big))) \oplus \big(W_3(3) \otimes W_3(3,1^2)\big) \oplus \\
\big(W_3(3) \otimes W_3(2^2,1)\big) \oplus \big(W_3(1^3) \otimes W_3(3,1^2)\big) \oplus \big(W_3(1^3) \otimes W_3(2^2,1)\big) \oplus \\
\big(W_3(2^2) \otimes_s W_3(2^2)\big) \oplus \big(W_3(2^2) \otimes W_3(2,1^2)\big) \oplus \big(W_3(2,1^2) \otimes_s W_3(2,1^2)\big) \cong \\
\big(W(4) \oplus W(2^2)\big)^{\otimes_s 2} \oplus W_3(6,2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4^2) \oplus W_3(4,3,1) \oplus 2W_3(4,2^2) \oplus \\
W_3(6,1^2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(3^2,2) \oplus W_3(5,3) \oplus W_3(4,3,1) \oplus \\
W_3(3^2,2) \oplus (W_3(2) \otimes (W_3(3) \otimes_s W(3))) \oplus \big(W_3(2) \otimes \big(W_3(3) \otimes W(1^3)\big)\big) \oplus \\
\big(W_3(2) \otimes \big(W_3(1^3) \otimes_s W(1^3)\big)\big) \oplus W_3(6,1^2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(5,2,1) \oplus \\
W_3(4,2^2) \oplus W_3(4,2^2) \oplus W_3(3^2,2) \oplus W_3(4^2) \oplus W_3(4,2^2) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(3^2,2) \oplus \\
W_3(4,2^2) \cong (W(4) \otimes_s W(4)) \oplus \big(W(4) \otimes W(2^2)\big) \oplus \big(W(2^2) \otimes_s W(2^2)\big) \oplus W_3(6,2) \oplus \\
W_3(5,2,1) \oplus W_3(4^2) \oplus W_3(4,3,1) \oplus 2W_3(4,2^2) \oplus W_3(6,1^2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4,3,1) \\
\oplus W_3(3^2,2) \oplus W_3(5,3) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(3^2,2) \oplus W_3(8) \oplus W_3(7,1) \oplus 2W_3(6,2) \oplus \\
W_3(5,3) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4^2) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(4,2^2) \oplus W_3(6,1^2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus \\
W_3(4,3,1) \oplus W_3(4,2^2) \oplus W_3(6,1^2) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(5,2,1) \oplus W_3(4,2^2) \\
\oplus W_3(4,2^2) \oplus W_3(3^2,2) \oplus W_3(4^2) \oplus W_3(4,2^2) \oplus W_3(4,3,1) \oplus W_3(3^2,2) \oplus W_3(4,2^2) \\
\cong 2W_3(8) \oplus W_3(7,1) \oplus 5W_3(6,2) \oplus 3W_3(6,1^2) \oplus 2W_3(5,3) \oplus 7W_3(5,2,1) \oplus 5W_3(4^2) \oplus \\
7W_3(4,3,1) \oplus 10W_3(4,2^2) \oplus 4W_3(3^2,2).
\end{gathered}$$

□

Até aqui decompomos as componentes homogêneas de $\omega^2(S)$ para podermos compreender melhor as relações de definição de C_0, e por sua vez as de C_{3d}. Agora vamos especificar quais representações polinomiais $W(\lambda)$ devemos concentrar nossos esforços para procurar por geradores de J.

Observação 3.2. *Sabemos que se V é um $\mathbb{K}$-espaço multigraduado, então*

$$Hilb(V, t_1, \ldots, t_m) = \sum dim(V^{(n_1,\ldots,n_m)}) t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m}.$$

Defina $h_k(t_1, \ldots, t_m) = \sum\limits_{n_1+\cdots+n_m=k} dim(V^{(n_1,\ldots,n_m)}) t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m}$, ou seja, h_k é a componente homogênea de grau k de $Hilb(V, t_1, \ldots, t_m)$. Se conhecermos h_k, então podemos calcular a quem cada componente $\sum\limits_{n_1+\cdots+n_m=k} V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ é isomorfa.

Lema 3.3. *Sejam $d = 3$ e J o núcleo do homomorfismo natural $S \longrightarrow C_0$, então:*

(i)
$$Hilb\,(C_{33}, t_1, t_2, t_3) = \frac{p(t_1, t_2, t_3)}{q(t_1, t_2t_3)},$$

onde $e_1 = e_1(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2 + t_3$, $e_2 = e_2(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$, $e_3 = e_3(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2t_3$ *e*

$$\begin{array}{rl} p(t_1,t_2,t_3) = & 1 - e_2 + e_3 + e_1e_3 + e_2^2 + e_1^2e_3 - e_2e_3 - 2e_1e_2e_3 + e_3^2 + e_2^2e_3 - e_1^2e_2e_3 + \\ & 2e_1^2e_3^2 + e_1^3e_3^2 + e_2^2e_3^2 - e_1^2e_2e_3^2 - e_1e_3^3 - 2e_1e_2^2e_3^2 + 2e_2e_3^3 - e_2^3e_3^2 + e_1^3e_3^3 + \\ & 2e_1^2e_2e_3^3 - 2e_1e_3^4 - e_1^2e_3^4 + e_1e_2^2e_3^3 + e_2e_3^4 - e_2^3e_3^3 - 2e_2^2e_3^4 - e_1^2e_3^5 + e_1e_2^2e_3^4 + \\ & 2e_1e_2e_3^5 - e_3^6 - e_2^2e_3^5 + e_1e_3^6 - e_2e_3^6 - e_1^2e_3^6 - e_3^7 + e_1e_3^7 - e_3^8 \end{array},$$

$$q = \left(\prod_{i=1}^{3}(1-t_i)\left(1-t_i^2\right)\left(1-t_i^3\right)\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(1-t_it_j)^2\left(1-t_i^2t_j\right)\left(1-t_it_j^2\right)\right)(1-t_1t_2t_3)\,.$$

(ii) $Hilb\,(J, t_1, t_2, t_3) = \sum_{k>0} h_k(t_1, t_2, t_3)$, *onde* h_k *é a componente homogênea de grau* k *de* $Hilb\,(J, t_1, t_2, t_3)$ *que é tal que* $h_k(t_1, t_2, t_3) = 0$ *para* $k \leqslant 6$ *e*

$$h_7(t_1, t_2, t_3) = S_{(3,2^2)}(t_1, t_2, t_3),$$

$$h_8(t_1, t_2, t_3) = S_{(4,3,1)}(t_1, t_2, t_3) + 2S_{(4,2^2)}(t_1, t_2, t_3) + S_{(3^2,2)}(t_1, t_2, t_3).$$

Demonstração. O item (i) resulta dos cálculos feitos em [5], então vejamos (ii). Uma vez que
$$\frac{S}{J} \cong C_0,$$
temos $Hilb\,(S, t_1, t_2, t_3) = Hilb\,(C_0, t_1, t_2, t_3) + Hilb\,(J, t_1, t_2, t_3)$. Sabemos que

$$\begin{array}{c} Hilb\,(G_2 \oplus \cdots \oplus G_6, t_1, t_2, t_3) = Hilb\,\big(W_3(2) \oplus W_3(3) \oplus W_3(1^3) \oplus W_3(2^2) \oplus W_3(2,1^2) \oplus \\ W_3(3,1^2) \oplus W_3(2^2,1) \oplus W_3(3^2), t_1, t_2, t_3\big) = Hilb\,(W_3(2), t_1, t_2, t_3) + Hilb\,(W_3(3), t_1, t_2, t_3) + \\ Hilb\,\big(W_3(1^3), t_1, t_2, t_3\big) + Hilb\,\big(W_3(2^2), t_1, t_2, t_3\big) + Hilb\,\big(W_3(2,1^2), t_1, t_2, t_3\big) + \\ Hilb\,\big(W_3(3,1^2), t_1, t_2, t_3\big) + Hilb\,\big(W_3(2^2,1), t_1, t_2, t_3\big) + Hilb\,\big(W_3(3^2), t_1, t_2, t_3\big) = \\ S_{(2)}(t_1, t_2, t_3) + S_{(3)}(t_1, t_2, t_3) + S_{(1^3)}(t_1, t_2, t_3) + S_{(2^2)}(t_1, t_2, t_3) + \\ S_{(2,1^2)}(t_1, t_2, t_3) + S_{(3,1^2)}(t_1, t_2, t_3) + S_{(2^2,1)}(t_1, t_2, t_3) + S_{(3^2)}(t_1, t_2, t_3) \end{array}.$$

Se denotarmos $Hilb\,(G_2 \oplus \cdots \oplus G_6, t_1, t_2, t_3) = \sum a_{k_1k_2k_3} t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3}$ teremos que a série de Hilbert da álgebra simétrica S é

$$Hilb\,(S, t_1, t_2, t_3) = \prod \frac{1}{\left(1 - t_1^{k_1}t_2^{k_2}t_3^{k_3}\right)^{a_{k_1k_2k_3}}}.$$

Como já vimos, $C_{33} \cong \mathbb{K}\left[tr\,(X_1)\,, tr\,(X_2)\,, tr\,(X_3)\right] \otimes C_0$, logo

$$Hilb\,(C_{33}, t_1, t_2, t_3) = Hilb\,(\mathbb{K}\left[tr\,(X_1)\,, tr\,(X_2)\,, tr\,(X_3)\right], t_1, t_2, t_3)\,Hilb\,(C_0, t_1, t_2, t_3)\,.$$

Do item (i) e do fato de que

$$Hilb\left(\mathbb{K}\left[tr\left(X_1\right), tr\left(X_2\right), tr\left(X_3\right)\right], t_1, t_2, t_3\right) = \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}$$

segue que

$$Hilb\left(C_0, t_1, t_2, t_3\right) = \frac{p(t_1, t_2, t_3)}{q(t_1, t_2, t_3)(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}.$$

Então o resultado segue ao expandirmos as primeiras componentes homogêneas de $Hilb\left(S, t_1, t_2, t_3\right) - Hilb\left(C_0, t_1, t_2, t_3\right)$. □

Corolário 3.2. *Para $d = 3$, a álgebra C_0 possui um sistema mínimo de relações de definição com a propriedade de que as relações de grau 7 e 8 formam GL_3-módulos isomorfos, respectivamente, a $W_3(3, 2^2)$ e $W_3(4, 3, 1) \oplus 2W_3(4, 2^2) \oplus W_3(3^2, 2)$.*

Demonstração. Seja J o núcleo do homomorfismo natural $S \longrightarrow C_0$, então qualquer sistema de elementos homogêneos em J que forma uma base para o espaço vetorial quociente $J/J\omega(S)$ será um sistema mínimo de geradores de J. Uma vez que $\omega(S)$ não contém elementos homogêneos de grau 1 e J não contém elementos homogêneos de grau menor que 7, temos que as componentes multi-homogêneas de grau 7 e 8 de J e $J/J\omega(S)$ possuem mesma dimensão. Então $J^{(7)}$ e $J^{(8)}$ são isomorfos como GL_3-módulos a $(J/J\omega(S))^{(7)}$ e $(J/J\omega(S))^{(8)}$, respectivamente, e assim o resultado seguirá a partir dos valores de h_7 e h_8 encontrados no Lema 3.3. □

Observação 3.3. *Seja $W_d \cong \sum m\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right) W_d\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right)$. Como vimos no Teorema 1.8 $W_d\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right)$ é isomorfo a um submódulo de $(\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle)^{(n)}$, onde n é tal que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \vdash n$. Então $W_d\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right) \cap \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{d-1}\rangle$ será isomorfo a um ideal não nulo de $(\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{d-1}\rangle)^{(n)}$ se $\lambda_d = 0$ e $W_d\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right) \cap \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{d-1}\rangle = 0$ se $\lambda_d \neq 0$, assim*

$$W_d \cap \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{d-1}\rangle \cong \sum m\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right) W_{d-1}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_d\right).$$

Desta forma o Lema 3.3 e o Corolário 3.2 nos dizem que para $d \leqslant 3$ $J^{(7)} \cong W_d(3, 2^2)$, agora para $d \geqslant 4$ nos diz que na decomposição de $J^{(7)}$ não temos diagramas correspondentes com partições em não mais que 1 ou 2 partes e o único com 3 partes é $W_d(3, 2^2)$, então como $J^{(7)} \subset \left(\omega^2(S)\right)^{(7)}$ e pelo que vimos na Proposição 3.3 devemos procurar os geradores de $J^{(7)}$ em

$$W(4, 1^3), W(3, 2^2), W(3, 2, 1^2), W(3, 1^4), W(2^3, 1), W(2^2, 1^3), W(2, 1^5).$$

Vejamos alguns geradores para $W(\lambda)$.

Proposição 3.5. *Os seguintes elementos de $S = \mathbb{K}\left[G_2 \oplus \cdots \oplus G_6\right]$ são geradores:*
Para $\lambda = (4, 1^3)$:

$$w_1 = \quad (tr\left(s_3(x_1, x_2, x_3)(x_1x_4 + x_4x_1)\right) - tr\left(s_3(x_1, x_2, x_4)(x_1x_3 + x_3x_1)\right) +$$

$$
\begin{aligned}
& tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)(x_1x_2+x_2x_1)\right)+3tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_1^2\right)\right)tr(x_1^2)+\\
& 5\left(-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1^2\right)tr(x_1x_4)+\right.\\
& \left.tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_1^2\right)tr(x_1x_3)-tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)x_1^2\right)tr(x_1x_2)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2 = \; & \left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_4\right)-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_3\right)+tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)x_2\right)+\right.\\
& \left.3tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_1\right)\right)tr(x_1^3)+4\left(-tr\left(s_2(x_1,x_2,x_3)x_1\right)tr(x_1^2x_4)+\right.\\
& \left.tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_1\right)tr(x_1^2x_3)-tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)x_1\right)tr(x_1^2x_2)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_3 = \; & \left(tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)\right)tr(x_1^2)-tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\right)tr(x_1x_2)+\right.\\
& \left.tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\right)tr(x_1x_3)-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right)tr(x_1x_4)\right)tr(x_1^2).
\end{aligned}
$$

Para $\lambda=(3,2^2)$*:*

$$
w_1 = \sum_{\sigma\in S_3} sign(\sigma)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\right)tr(x_1x_{\sigma(3)}),
$$

$$
w_2 = tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right),
$$

$$
\begin{aligned}
w_3 = \; & tr\left([x_1,x_2]^2\right)tr(x_1x_3^2)+tr\left([x_1,x_3]^2\right)tr(x_1x_2^2)+tr\left([x_2,x_3]^2\right)tr(x_1^3)-\\
& tr\left([x_1,x_2][x_1,x_3]\right)tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2))+2tr\left([x_1,x_2][x_2,x_3]\right)tr(x_1^2x_3)-\\
& 2tr\left([x_1,x_3][x_2,x_3]\right)tr(x_1^2x_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_4 = \; & tr(x_1^3)\left(tr(x_2^2)tr(x_3^2)-(tr(x_2x_3))^2\right)+tr(x_1x_2^2)\left(tr(x_1^2)tr(x_3^2)-(tr(x_1x_3))^2\right)+\\
& tr(x_1x_3^2)\left(tr(x_1^2)tr(x_2^2)-(tr(x_1x_2))^2\right)+\\
& 2tr(x_1^2x_2)\left(-tr(x_1x_2)tr(x_3^2)+tr(x_1x_3)tr(x_2x_3)\right)+\\
& 2tr(x_1^2x_3)\left(-tr(x_1x_3)tr(x_2^2)+tr(x_1x_2)tr(x_2x_3)\right)+\\
& tr\left(x_1(x_2x_3+x_3x_2)\right)\left(-tr(x_1^2)tr(x_2x_3)+tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right).
\end{aligned}
$$

Para $\lambda=(3,2,1^2)$*:*

$$
\begin{aligned}
w_1 = \; & \left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)(x_2x_4+x_4x_2)\right)-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)(x_2x_3+x_3x_2)\right)\right.\\
& \left.4tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)(x_1x_2+x_2x_1)\right)+2tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)x_2^2\right)\right)tr(x_1^2)+\\
& \left(-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)(x_1x_4+x_4x_1)\right)+tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)(x_1x_3+x_3x_1)\right)\right.\\
& \left.-6tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)(x_1x_2+x_2x_1)\right)-8tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_1^2\right)\right)tr(x_1x_2)\\
& +5\left(-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)(x_1x_2+x_2x_1)\right)tr(x_1x_4)+\right.\\
& \left.tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)(x_1x_2+x_2x_1)\right)tr(x_1x_3)\right)+\\
& 10\left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1^2\right)tr(x_2x_4)-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_1^2\right)tr(x_2x_3)\right.\\
& \left.tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)x_1^2\right)tr(x_2^2)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2 = \; & tr(x_1^2)\left(-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)[x_2,x_4]\right)-tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)[x_1,x_2]\right)+\right.\\
& \left.tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)[x_2,x_3]\right)+3tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)[x_1,x_2]\right)\right)\\
& +tr(x_1x_2)\left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)[x_1,x_4]\right)-tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)[x_1,x_2]\right)\right.\\
& \left.-tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)[x_1,x_3]\right)-tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)[x_1,x_2]\right)\right)\\
& +3tr(x_1x_3)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)[x_1,x_2]\right)-3tr(x_1x_4)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)[x_1,x_2]\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_3 = \; & tr\left([x_1,x_2]^2\right)tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\right)-tr\left([x_1,x_2][x_1,x_3]\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\right)\\
& +tr\left([x_1,x_2][x_1,x_4]\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} w_4 = \quad & -2tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_2\right)tr(x_1^3) + 2\left(tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)x_2\right)\right. \\ & tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_1\right)) tr(x_1^2x_2) - 2tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_2\right)tr(x_1^2x_3) \\ & +2tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_2\right)tr(x_1^2x_4) - 2tr\left(s_(x_1,x_3,x_4)x_1\right)tr(x_1x_2^2) \\ & +tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_1\right)tr\left(x_1(x_2x_3+x_3x_2)\right) - tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right)tr\left(x_1(x_2x_4+x_4x_2)\right), \end{aligned}$$

$$w_5 = tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\right) - tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_1\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right),$$

$$\begin{aligned} w_6 = \quad & \left(tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2\right)tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\right) \\ & + \left(-tr(x_1^2)tr(x_2x_3) + tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\right) \\ & + \left(tr(x_1^2)tr(x_2x_4) - tr(x_1x_2)tr(x_1x_4)\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right). \end{aligned}$$

Para $\lambda = (3,1^4)$*:*

$$w_1 = tr\left(s_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\right)tr(x_1^2),$$

$$w_2 = \sum_{\sigma\in S_5,\sigma(1)=1} sign(\sigma)tr\left(s_3(x_1,x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})x_1\right)tr\left(s_3(x_1,x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)})\right).$$

Para $\lambda = (2^3,1)$*:*

$$\begin{aligned} w_1 = \quad & tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)\left[x_2,x_3\right]\right)tr(x_1^2) \\ & -\left(tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\left[x_2,x_3\right]\right) + tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)\left[x_1,x_3\right]\right)\right)tr(x_1x_2) \\ & +\left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\left[x_2,x_3\right]\right) + tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)\left[x_1,x_2\right]\right)\right)tr(x_1x_3) \\ & -tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\left[x_2,x_3\right]\right)tr(x_1x_4) + tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\left[x_1,x_3\right]\right)tr(x_2^2) \\ & -\left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\left[x_1,x_3\right]\right) + tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\left[x_1,x_2\right]\right)\right)tr(x_2x_3) \\ & tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\left[x_1,x_3\right]\right)tr(x_2x_4) + tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\left[x_1,x_2\right]\right)tr(x_3^2) \\ & -tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\left[x_1,x_2\right]\right)tr(x_3x_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 = \quad & \left(-3\left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_4\right) + tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_1\right)\right) + tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)x_2\right)\right. \\ & +tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_1\right) - tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)x_3\right) \\ & \left.+tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)x_1\right)\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right) \\ & +4tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_3\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\right) \\ & -4tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_2\right)tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\right) \\ & +4tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right)tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)\right). \end{aligned}$$

Para $\lambda = (2^2,1^3)$*:*

$$\begin{aligned} w_1 = \quad & \left(tr\left(\left[x_1,x_4\right]\left[x_2,x_5\right]\right) + tr\left(\left[x_1,x_5\right]\left[x_2,x_4\right]\right)\right. \\ & \left.+2tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_4,x_5\right]\right) - 2tr\left(\left[x_1,x_5\right]\left[x_2,x_4\right]\right)\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right) \\ & +\left(-tr\left(\left[x_1,x_3\right]\left[x_2,x_5\right]\right) - tr\left(\left[x_1,x_5\right]\left[x_2,x_3\right]\right) - 2tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_3,x_5\right]\right)\right. \\ & \left.+2tr\left(\left[x_1,x_5\right]\left[x_2,x_3\right]\right)\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\right) + \left(tr\left(\left[x_1,x_3\right]\left[x_2,x_4\right]\right)\right. \\ & +tr\left(\left[x_1,x_4\right]\left[x_2,x_3\right]\right) + 2tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_3,x_4\right]\right) \\ & \left.-2tr\left(\left[x_1,x_4\right]\left[x_2,x_3\right]\right)\right)tr\left(s_3(x_1,x_2,x_5)\right) \\ & +3tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_2,x_5\right]\right)tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\right) - 3tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_2,x_4\right]\right)tr\left(s_3(x_1,x_3,x_5)\right) \\ & +3tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_2,x_3\right]\right)tr\left(s_3(x_1,x_4,x_5)\right) - 3tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_1,x_5\right]\right)tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)\right) \\ & +3tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_1,x_4\right]\right)tr\left(s_3(x_2,x_3,x_5)\right) - 3tr\left(\left[x_1,x_2\right]\left[x_1,x_3\right]\right)tr\left(s_3(x_2,x_4,x_5)\right) \\ & +3tr\left(\left[x_1,x_2\right]^2\right)tr\left(s_3(x_3,x_4,x_5)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 = & \sum_{\sigma\in S_5}\sum_{\tau\in S_2} sign(\sigma\tau)tr\left(s_3(x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)})\right) tr\left(s_3(x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)})x_{\tau(2)}\right) \\ & + \sum_{\sigma\in S_5}\sum_{\tau\in S_2} sign(\sigma\tau)tr\left(s_3(x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)})\right) tr\left(s_3(x_{\tau(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)})x_{\sigma(5)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_3 = \ & tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right)\left(tr(x_1x_4)tr(x_2x_5) - tr(x_1x_5)tr(x_2x_4)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_1,x_2,x_4)\right)\left(-tr(x_1x_3)tr(x_2x_5) + tr(x_1x_5)tr(x_2x_3)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_1,x_2,x_5)\right)\left(tr(x_1x_3)tr(x_2x_4) - tr(x_1x_4)tr(x_2x_3)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_1,x_3,x_4)\right)\left(tr(x_1x_2)tr(x_2x_5) - tr(x_1x_5)tr(x_2^2)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_1,x_3,x_5)\right)\left(-tr(x_1x_2)tr(x_2x_4) + tr(x_1x_4)tr(x_2^2)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_1,x_4,x_5)\right)\left(tr(x_1x_2)tr(x_2x_3) - tr(x_1x_3)tr(x_2^2)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_2,x_3,x_4)\right)\left(tr(x_1x_2)tr(x_1x_5) - tr(x_2x_5)tr(x_1^2)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_2,x_3,x_5)\right)\left(-tr(x_1x_2)tr(x_1x_4) + tr(x_2x_4)tr(x_1^2)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_2,x_4,x_5)\right)\left(tr(x_1x_2)tr(x_1x_3) - tr(x_2x_3)tr(x_1^2)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_3,x_4,x_5)\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2\right). \end{aligned}$$

Para $\lambda = (2,1^5)$*:*

$$w_1 = \sum_{\sigma\in S_6} sign(\sigma)tr\left(s_5(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)})\right) tr(x_1,x_{\sigma(6)}),$$

$$\begin{aligned} w_2 = & \sum_{\sigma\in S_6} sign(\sigma)tr\left(s_3(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})x_1\right) tr\left(s_3(x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)},x_{\sigma(6)})\right) \\ & + \sum_{\sigma\in S_6} sign(\sigma)tr\left(s_3(x_1,x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}\right) tr\left(s_3(x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)},x_{\sigma(6)})\right). \end{aligned}$$

Para $\lambda \in \{(4,1^3),(3,2^2),(3,2,1^2),(3,1^4),(2^3,1),(2^2,1^3),(2,1^5)\}$*, todo gerador* $w \in W(\lambda) \subset \omega^2(S)$ *é igual a uma combinação linear dos respectivos* w_i*.*

Demonstração. Vejamos o caso $\lambda = (3,2^2)$. Pela Proposição 1.17 temos que

$$(W(2)\otimes_s W(2))\otimes W(3) \cong (W(4)\otimes W(3)) \oplus \left(W(2^2)\otimes W(3)\right),$$

onde pela Regra de Littlewood-Richardson podemos calcular que

$$W(4)\otimes W(3) \cong W(7)\oplus W(6,1)\oplus W(5,2)\oplus W(4,3),$$

$$W(2^2)\otimes W(3) \cong W(5,2)\oplus W(4,2,1)\oplus W(3,2^2).$$

Logo $W(3,2^2)$ participa com multiplicidade 1 na decomposição de $(W(2)\otimes_s W(2))\otimes W(3)$ e é um submódulo de $W(2^2)\otimes W(3)$. Da Proposição 3.1 sabemos que $W(3)\subset G_3$ e $W(2) = G_2$, e seus geradores canônicos são $tr(x_1^3)$ e $tr(x_1^2)$, respectivamente. Apliquemos o Lema 1.2 em $W(3)$ e $W(2)$ para encontrarmos suas bases.

- $W(2)$

$$w_{(2)}(x_{11}+\cdots+x_{1d}, x_{22}+\cdots+x_{2d},\ldots,x_{dd}) = tr\left((x_{11}+\cdots+x_{1d})^2\right) = \sum_{i,j=1}^{d} tr(x_{1i}x_{1j}).$$

Seja $T_{(2)}$ uma (2)-tabela semistandard de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, onde $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = 2$. Caso $\alpha_i = 2$, para $i \in \{1, \dots, d\}$ fixado, e $\alpha_m = 0$, se $m \neq i$, então $u_{T_{(2)}}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{2d}, \dots, x_{dd}) = tr(x_{1i}^2)$, logo

$$v_{t_{(2)}}(x_1, \dots, x_d) = tr(x_i^2).$$

Caso $i, j \in \{1, \dots, d\}$, com $i < j$, são tais que $\alpha_i = \alpha_j = 1$ e $\alpha_m = 0$ para $m \neq i, j$, então $u_{T_{(2)}}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{2d}, \dots, x_{dd}) = tr(x_{1i}x_{1j}) + tr(x_{1j}x_{1i}) = 2tr(x_{1i}x_{1j})$, logo

$$v_{t_{(2)}}(x_1, \dots, x_d) = 2tr(x_ix_j).$$

Assim, pelo Lema 1.2

$$\{tr(x_i^2), tr(x_ix_j) | i < j\},$$

é base para $W(2)$.

- $W(3)$

$$w_{(3)}(x_{11} + \cdots + x_{1d}, \dots, x_{dd}) = tr\left((x_{11} + \cdots + x_{1d})^3\right) = \sum_{i,j,k=1}^{d} tr(x_{1i}x_{1j}x_{1k}).$$

Seja $T_{(3)}$ uma (3)-tabela semistandard de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, onde $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = 3$. Caso $\alpha_i = 3$, para $i \in \{1, \dots, d\}$ fixado, e $\alpha_m = 0$, se $m \neq i$, então $u_{T_{(3)}}(x_{11}, \dots, x_{dd}) = tr(x_{1i}^3)$, logo

$$v_{T_{(3)}}(x_1, \dots, x_d) = tr(x_i^3).$$

Caso $i, j \in \{1, \dots, d\}$, com $i < j$, são tais que $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 2$ e $\alpha_m = 0$ para $m \neq i, j$, então $u_{T_{(3)}}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{2,d}, \dots, x_{dd}) = tr(x_{1i}x_{1j}^2) + tr(x_{1j}x_{1i}x_{1j}) + tr(x_{1i}x_{1j}^2)$, logo

$$v_{T_{(3)}}(x_1, \dots, x_d) = 3tr(x_ix_j^2).$$

Agora se $i, j, k \in \{1, \dots, d\}$, com $i < j < k$, são tais que $\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1$ e $\alpha_m = 0$ para $m \neq i, j, k$, então $u_{T_{(3)}}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{2,d}, \dots, x_{dd}) = tr(x_{1i}x_{1j}x_{1k}) + tr(x_{1i}x_{1k}x_{1j}) + tr(x_{1j}x_{1i}x_{1k}) + tr(x_{1j}x_{1k}x_{1i}) + tr(x_{1k}x_{1i}x_{1j}) + tr(x_{1k}x_{1j}x_{1i}) = tr(x_{1i}(x_{1j}x_{1k} + x_{1k}x_{1j})) + tr((x_{1k}x_{1j} + x_{1j}x_{1k})x_{1i}) + tr((x_{1j}x_{1k} + x_{1k}x_{1j})x_{1i}) = 3tr(x_{1i}(x_{1j}x_{1k} + x_{1k}x_{1j}))$, logo

$$v_{T_{(3)}}(x_1, \dots, x_d) = 3tr(x_i(x_jx_k + x_kx_j)).$$

Assim, pelo Lema 1.2

$$\{tr(x_i^3), tr(x_ix_j^2), tr(x_i(x_jx_k + x_kx_j)) | i < j < k\},$$

é base para $W(3)$.

Considere o polinômio $u(x_1,x_2) = tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2$, que é multi-homogêneo de grau $(2,2)$. Note que

$$u(x_1, x_1 + x_2) = tr(x_1^2)tr(x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2) - \left(tr(x_1^2) + tr(x_1x_2)\right)^2 = \\ tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2 = u(x_1,x_2) \Rightarrow u(x_1,x_1+x_2) = u(x_1,x_2).$$

Então, pelo Lema 1.1 temos que $u(x_1,x_2)$ é um gerador para $W(2^2)$. A linearização parcial de $u(x_1,x_2)$ em x_2 nos dá que

$$u(x_1, x_2 + x_3) - u(x_1,x_2) - u(x_1,x_3) = tr(x_1^2)tr(x_2^2) + 2tr(x_1^2)tr(x_2x_3) + tr(x_1^2)tr(x_3^2) \\ - (tr(x_1x_2))^2 - 2tr(x_1x_2)tr(x_1x_3) - (tr(x_1x_3))^2 - tr(x_1^2)tr(x_2^2) + (tr(x_1x_2))^2 \\ -tr(x_1^2)tr(x_3^2) + (tr(x_1x_3))^2 = 2tr(x_1^2)tr(x_2x_3) - 2tr(x_1x_2)tr(x_1x_3).$$

Logo, a menos de uma constante, a linearização de $u(x_1,x_2)$ é

$$v(x_1,x_2,x_3) = tr(x_1^2)tr(x_2x_3) - tr(x_1x_2)tr(x_1x_3).$$

Estamos procurando por um elemento $w = w(x_1,x_2,x_3)$ em $W(3)\otimes W(2^2) \subset W(3)\otimes (W(2)\otimes_s W(2))$ que é multi-homogêneo de grau $(3,2,2)$ e satisfaz as condições

$$\Delta_{12}(w) = \Delta_{13}(w) = \Delta_{23}(w) = 0, \tag{3.33}$$

onde Δ_{ij} é a derivação definida no Lema 1.1. Usando um algoritmo conhecido que é calculado em termos dos geradores de $W(2)$, $W(3)$, $W(2^2)$ e de $v(x_1,x_2,x_3)$, sabemos que este tal elemento w é da forma

$$w = \xi_1 tr(x_1^3)u(x_2,x_3) + \xi_2 tr(x_1^2x_2)v(x_3,x_1,x_2) + \xi_3 tr(x_1^2x_3)v(x_2,x_1,x_3) \\ +\xi_4 tr(x_1x_2^2)u(x_1x_3) + \xi_5 tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2))v(x_1,x_2,x_3) + \xi_6 tr(x_1x_3^2)u(x_1,x_2).$$

Usando a definição de derivação, calculemos $\Delta_{12}(w)$. Primeiramente veja que

$$\Delta_{12}(tr(x_2^2)) = tr(\Delta_{12}(x_2^2)) = tr(\Delta_{12}(x_2)x_2 + x_2\Delta_{12}(x_2)) = tr(x_1x_2 + x_2x_1) = 2tr(x_1x_2).$$

$$\Delta_{12}\left((tr(x_2x_3))^2\right) = \Delta_{12}(tr(x_2x_3))tr(x_2x_3) + tr(x_2x_3)\Delta_{12}(tr(x_2x_3)) = \\ 2tr(\Delta_{12}(x_2x_3))tr(x_2x_3) = 2tr(x_1x_3)tr(x_2x_3).$$

$$\Delta_{12}\left(u(x_2,x_3)\right) = \Delta_{12}\left(tr(x_2^2)tr(x_3^3) - (tr(x_2x_3))^2\right) = \Delta_{12}\left(tr(x_2^2)\right)tr(x_3^2) + \\ tr(x_2^2)\Delta_{12}\left(tr(x_3^2)\right) - \Delta_{12}\left((tr(x_2x_3))^2\right) = 2tr(x_1x_2)tr(x_3^2) \\ -2tr(x_1x_3)tr(x_2x_3) = 2v(x_3,x_1,x_2).$$

$$\Delta_{12}\left(\xi_1 tr(x_1^3)u(x_2,x_3)\right) = \xi_1\left(\Delta_{12}(tr(x_1^3))u(x_2,x_3) + tr(x_1^3)\Delta_{12}(u(x_2,x_3))\right) = \\ \xi_1 tr(x_1^3)2v(x_3,x_1,x_2).$$

$$\Delta_{12}(tr(x_1x_2)) = tr(\Delta_{12}(x_1x_2)) = tr(\Delta_{12}(x_1)x_2 + x_1\Delta_{12}(x_2)) = tr(x_1^2).$$

$$\Delta_{12}(tr(x_3x_2)) = tr(\Delta_{12}(x_3x_2)) = tr(x_3x_1).$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\left(v(x_3,x_1,x_2)\right) = \;& \Delta\left(tr(x_3^2)tr(x_1x_3) - tr(x_3x_1)tr(x_3x_2)\right) = tr(x_3^2)\Delta_{12}(tr(x_1x_2)) \\ & -tr(x_3x_1)\Delta_{12}(tr(x_3x_2)) = tr(x_3^2)tr(x_1^2) - tr(x_3x_1)tr(x_3x_1) = \\ & u(x_1,x_3).\end{aligned}$$

$$\Delta_{12}(tr(x_1^2x_2)) = tr\left(\Delta_{12}(x_1^2x_2)\right) = tr\left(x_1^2\Delta_{12}(x_2)\right) = tr(x_1^3).$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\left(\xi_2 tr(x_1^2x_2)v(x_3,x_1,x_2)\right) = \;& \xi_2\left(\Delta_{12}\left(tr(x_1^2x_2)\right)v(x_3,x_1,x_2) + tr(x_1^2x_2)\Delta_{12}\left(v(x_3,x_1,x_2)\right)\right) \\ & = \xi_2\left(tr(x_1^3)v(x_3,x_1,x_2) + tr(x_1^2x_2)u(x_1,x_3)\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\left(v(x_2,x_1,x_3)\right) = \;& \Delta_{12}\left(tr(x_2^2)tr(x_1x_3) - tr(x_2x_1)tr(x_2x_3)\right) = \Delta_{12}\left(tr(x_2^2)\right)tr(x_1x_3) \\ & -\left(\Delta_{12}\left(tr(x_1x_2)\right)tr(x_2x_3) + tr(x_2x_1)\Delta_{12}\left(tr(x_3x_2)\right)\right) = \\ & 2tr(x_1x_2)tr(x_1x_3) - tr(x_1^2)tr(x_2x_3) - tr(x_2x_1)tr(x_3x_1) = \\ & -\left(tr(x_1^2)tr(x_2x_3) - tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right) = -v(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

$$\Delta_{12}\left(\xi_3 tr(x_1^2x_3)v(x_2,x_1,x_3)\right) = \xi_3 tr(x_1^2x_3)\Delta_{12}\left(v(x_2,x_1,x_3)\right) = \xi_3 tr(x_1^2x_3)\left(-v(x_1,x_2,x_3)\right).$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\left(tr(x_1x_2^2)\right) = \;& tr\left(x_1\left(\Delta_{12}(x_2)x_2 + x_2\Delta_{12}(x_2)\right)\right) = tr\left(x_1(x_1x_2 + x_2x_1)\right) = \\ & tr(x_1^2x_2) + tr(x_1x_2x_1) = 2tr(x_1^2x_2).\end{aligned}$$

$$\Delta_{12}\left(\xi_4 tr(x_1x_2^2)u(x_1,x_3)\right) = \xi_4\Delta_{12}\left(tr(x_1x_2^2)\right)u(x_1,x_3) = \xi_4 2tr(x_1^2x_2)u(x_1,x_3).$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\left(tr(x_1(x_2x_3 + x_3x_2))\right) = \;& tr\left(x_1(\Delta_{12}(x_2)x_3 + x_3\Delta_{12}(x_2))\right) = tr(x_1(x_1x_3 + x_3x_1)) = \\ & tr(x_1^2x_3) + tr(x_1x_3x_1) = 2tr(x_1^2x_3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\left(v(x_1,x_2,x_3)\right) = \;& \Delta_{12}\left(tr(x_1^2)tr(x_2x_3) - tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right) = tr(x_1^2)\Delta_{12}\left(tr(x_2x_3)\right) \\ & -\Delta_{12}\left(tr(x_1x_2)\right)tr(x_1x_3) = tr(x_1^2)tr(x_3x_1) - tr(x_1^2)tr(x_1x_3) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\left(\xi_5 tr(x_1(x_2x_3 + x_3x_2))v(x_1,x_2,x_3)\right) = \;& \xi_5\left(\Delta_{12}\left(tr(x_1(x_2x_3 + x_3x_2))\right)v(x_1,x_2,x_3)\right. \\ & \left.+tr(x_1(x_2x_3 + x_3x_2))\Delta_{12}\left(v(x_1,x_2,x_3)\right)\right) = \\ & \xi_5 2tr(x_1^2x_3)v(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\Delta_{12}(w) = \Delta_{12}&\left(\xi_1 tr(x_1^3)u(x_2,x_3) + \xi_2 tr(x_1^2x_2)v(x_3,x_1,x_2) + \xi_3 tr(x_1^2x_3)v(x_2,x_1,x_3) + \right. \\ & \left.\xi_4 tr(x_1x_2^2)u(x_1x_3) + \xi_5 tr(x_1(x_2x_3 + x_3x_2))v(x_1,x_2,x_3) + \xi_6 tr(x_1x_3^2)u(x_1,x_2)\right) = \\ & \Delta_{12}\left(\xi_1 tr(x_1^3)u(x_2,x_3)\right) + \Delta_{12}\left(\xi_2 tr(x_1^2x_2)v(x_3,x_1,x_2)\right) + \Delta_{12}\left(\xi_3 tr(x_1^2x_3)v(x_2,x_1,x_3)\right) + \\ & \Delta_{12}\left(\xi_4 tr(x_1x_2^2)u(x_1x_3)\right) + \Delta_{12}\left(\xi_5 tr(x_1(x_2x_3 + x_3x_2))v(x_1,x_2,x_3)\right) + \Delta_{12}\left(\xi_6 tr(x_1x_3^2)u(x_1,x_2)\right) \\ & = 2\xi_1 tr(x_1^3)v(x_3,x_1,x_2) + \xi_2\left(tr(x_1^3)v(x_3,x_1,x_2) + tr(x_1^2x_2)u(x_1,x_3)\right) \\ & -\xi_3 tr(x_1^2x_3)v(x_1,x_2,x_3) + 2\xi_4 tr(x_1^2x_2)u(x_1,x_3) + 2\xi_5 tr(x_1^2x_3)v(x_1,x_2,x_3) + 0.\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\Delta_{12}(w) = \;& (2\xi_1 + \xi_2)\,tr(x_1^3)v(x_3,x_1,x_2) + (\xi_2 + 2\xi_4)\,tr(x_1^2x_2)u(x_1,x_3) + \\ & (-\xi_3 + 2\xi_5)\,tr(x_1^2x_3)v(x_1,x_2,x_3).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Analogamente calculamos $\Delta_{13}(w)$ e $\Delta_{23}(w)$ que resultarão em

$$\begin{aligned}\Delta_{13}(w) = \;& (2\xi_1 + \xi_3)\,tr(x_1^3)v(x_2,x_1,x_3) + (-\xi_2 + 2\xi_5)\,tr(x_1^2x_2)v(x_1,x_2,x_3) \\ & + (\xi_3 + 2\xi_6)\,tr(x_1^2x_3)u(x_1,x_2). \\ \Delta_{23}(w) = \;& (-\xi_2 + \xi_3)\,tr(x_1^2x_2)v(x_2,x_1,x_3) + 2\,(\xi_4 + \xi_5)\,tr(x_1x_2^2)v(x_1,x_2,x_3) \\ & + (\xi_5 + \xi_6)\,tr(x_1(x_2x_3 + x_3x_2))u(x_1,x_2).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Das equações (3.33), (3.34) e (3.35) obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 = \xi_2 + 2\xi_4 = -\xi_3 + 2\xi_5 = 0 \\ 2\xi_1 + \xi_3 = -\xi_2 + 2\xi_5 = \xi_3 + 2\xi_6 = 0 \\ -\xi_2 + \xi_3 = 2\left(\xi_4 + \xi_5\right) = \xi_5 + \xi_6 = 0 \end{cases}.$$

A menos de uma constante, a solução do sistema é

$$\xi_1 = \xi_4 = \xi_6 = 1, \quad \xi_2 = \xi_3 = -2, \quad \xi_5 = -1.$$

Então

$$\begin{aligned} w = \;& tr(x_1^3)u(x_2,x_3) - 2tr(x_1^2x_2)v(x_3,x_1,x_2) - 2tr(x_1^2x_3)v(x_2,x_1,x_3) + tr(x_1x_2^2)u(x_1x_3) \\ & -tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2))v(x_1,x_2,x_3) + tr(x_1x_3^2)u(x_1,x_2) = \\ & tr(x_1^3)\left(tr(x_2^2)tr(x_3^2) - (tr(x_2x_3))^2\right) + tr(x_1x_2^2)\left(tr(x_1^2)tr(x_3^2) - (tr(x_1x_3))^2\right) + \\ & tr(x_1x_3^2)\left(tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2\right) + 2tr(x_1^2x_2)\left(-tr(x_1x_2)tr(x_3^2) + \right. \\ & \left. tr(x_1x_3)tr(x_2x_3)\right) + 2tr(x_1^2x_3)\left(-tr(x_1x_3)tr(x_2^2) + tr(x_1x_2)tr(x_2x_3)\right) + \\ & tr\left(x_1(x_2x_3+x_3x_2)\right)\left(-tr(x_1^2)tr(x_2x_3) + tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right) = w_4. \end{aligned}$$

Na prática, na maioria dos casos, nós usaremos um algoritmo ligeiramente diferente para determinar os w_i. Consideraremos w_i com coeficientes desconhecidos, em seguida nós o calcularemos na álgebra traço C_{3d}, em vez de na álgebra simétrica S, para utilizar os programas que já temos exigindo que

$$g_{k\ell}\left(w(x_1,\dots,x_d)\right) = w(x_1,\dots,x_d), 1 \leqslant k < \ell \leqslant d,$$

e assim obteremos os possíveis candidatos que coincide com o número proposto na Proposição 3.3, concluímos que os w_i's realmente são os geradores procurados. □

Proposição 3.6. *Para $d = 3$, os seguintes elementos de $S = \mathbb{K}\left[G_2 \oplus \cdots \oplus G_6\right]$ são geradores:*
Para $\lambda = (4,3,1)$:

$$w_1 = \sum_{\sigma \in S_3} sign(\sigma) tr\left([x_1,x_2]^2 x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\right) tr(x_1x_{\sigma(3)}),$$

$$\begin{aligned} w_2 = \;& -tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1^2\right)tr(x_1x_2^2) + tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)(x_1x_2+x_2x_1)\right)tr(x_1^2x_2) \\ & -tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_2^2\right)tr(x_1^3), \end{aligned}$$

$$w_3 = tr\left([x_1,x_2]^2\right) tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right),$$

$$\begin{aligned} w_4 = \;& tr\left([x_1,x_2][x_1,x_3]\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2\right) \\ & -tr\left([x_1,x_2]^2\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_2x_3) - tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right), \end{aligned}$$

$$w_5 = tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2\right),$$

$$\begin{aligned} w_6 = \; & \left(tr(x_1^2x_2)tr(x_2^2x_3) - tr(x_1^2x_3)tr(x_2^3)\right) tr(x_1^2) + \left(-tr(x_1^3)tr(x_2^2x_3)\right. \\ & \left. -tr(x_1^2x_2)tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2)) + 3tr(x_1^2x_3)tr(x_1x_2^2)\right) tr(x_1x_2) \\ & + \left(tr(x_1^3)tr(x_2^3) - tr(x_1^2x_2)tr(x_1x_2^2)\right) tr(x_1x_3) \\ & + \left(tr(x_1^3)tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2)) - 2tr(x_1^2x_2)tr(x_1^2x_3)\right) tr(x_2^2) \\ & + \left(-2tr(x_1^3)tr(x_1x_2^2) + 2\left(tr(x_1^2x_2)\right)^2\right) tr(x_2x_3), \end{aligned}$$

$$w_7 = tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right)\left(tr(x_1^3)tr(x_2^2) - 2tr(x_1^2x_2)tr(x_1x_2) + tr(x_1x_2^2)tr(x_1^2)\right).$$

Para $\lambda = (4, 2^2)$ *existem* 10 *geradores,* 9 *deles estão listados a seguir:*

$$w_1 = tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1^2\right) tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right),$$

$$w_2 = \sum_{\sigma\in S_3} sign(\sigma) tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)}\right) tr(x_1^2x_{\sigma(3)}),$$

$$w_4 = \left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right)\right)^2,$$

$$\begin{aligned} w_5 = \; & tr\left([x_2,x_3]^2\right)\left(tr(x_1^2)\right)^2 - 2tr\left([x_1,x_3][x_2,x_3]\right) tr(x_1^2)tr(x_1x_2) \\ & +2tr\left([x_1,x_2][x_2,x_3]\right) tr(x_1^2)tr(x_1x_3) + tr\left([x_1,x_3]^2\right)\left(tr(x_1x_2)\right)^2 \\ & -2tr\left([x_1,x_2][x_1,x_3]\right) tr(x_1x_2)tr(x_1x_3) + tr\left([x_1,x_2]^2\right)\left(tr(x_1x_3)\right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_6 = \; & tr\left([x_1,x_3]^2\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2\right) \\ & -2tr\left([x_1,x_2][x_1,x_3]\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_2x_3) - tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right) \\ & +tr\left([x_1,x_2]^2\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_3^2) - (tr(x_1x_3))^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_7 = \; & \left(-4tr(x_1x_2^2)tr(x_1x_3^2) + \left(tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2))\right)^2\right) tr(x_1^2) \\ & +4\left(2tr(x_1^2x_2)tr(x_1x_3^2) - tr(x_1^2x_3)tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2))\right) tr(x_1x_2) \\ & +4\left(2tr(x_1^2x_3)tr(x_1x_2^2) - tr(x_1^2x_2)tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2))\right) tr(x_1x_3) \\ & +4\left(-tr(x_1^3)tr(x_1x_3^2) + \left(tr(x_1^2x_3)\right)^2\right) tr(x_2^2) \\ & +4\left(tr(x_1^3)tr(x_1(x_2x_3+x_3x_2)) - 2tr(x_1^2x_2)tr(x_1^2x_3)\right) tr(x_2x_3) \\ & +4\left(tr(x_1^3)tr(x_1x_2^2) + \left(tr(x_1^2x_2)\right)^2\right) tr(x_3^2), \end{aligned}$$

$$w_8 = \left(tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right)\right)^2 tr(x_1^2),$$

$$\begin{aligned} w_9 = \; & \left(tr(x_1^2)\left(tr(x_2^2)tr(x_3^2) - (tr(x_2x_3))^2\right) - (tr(x_1x_2))^2 tr(x_3^2)\right. \\ & \left. +2tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)tr(x_2x_3) - (tr(x_1x_3))^2 tr(x_2^2)\right) tr(x_1^2). \end{aligned}$$

Para $\lambda = (3^2, 2)$*:*

$$\begin{aligned} w_1 = \; & -tr\left([x_2,x_3]^2[x_1,x_2]\right) tr(x_1^2) \\ & +tr\left([x_1,x_2]\left([x_1,x_3][x_2,x_3] + [x_2,x_3][x_1,x_3]\right)\right) tr(x_1x_2) \\ & -2tr\left([x_1,x_2]^2[x_2,x_3]\right) tr(x_1x_3) - tr\left([x_1,x_3]^2[x_1,x_2]\right) tr(x_2^2) \\ & +2tr\left([x_1,x_2]^2[x_1,x_3]\right) tr(x_2x_3) - tr\left([x_1,x_2]^3\right) tr(x_3^2), \end{aligned}$$

$$w_2 = tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)[x_1,x_2]\right) tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)\right),$$

$$\begin{aligned} w_3 = \; & tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right) tr\left([x_1,x_2][x_2,x_3]\right) - tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_2\right) tr\left([x_1,x_2][x_1,x_3]\right) \\ & +tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_3\right) tr\left([x_1,x_2]^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_4 = \quad & tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_1\right)\left(tr(x_1x_2)tr(x_2x_3) - tr(x_1x_3)tr(x_2^2)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_2\right)\left(-tr(x_1^2)tr(x_2x_3) + tr(x_1x_2)tr(x_1x_3)\right) \\ & + tr\left(s_3(x_1,x_2,x_3)x_3\right)\left(tr(x_1^2)tr(x_2^2) - (tr(x_1x_2))^2\right). \end{aligned}$$

Em cada um dos casos, os geradores $w \in W_3(\lambda) \subset \omega^2(S)$ é igual a uma combinação linear dos w_1's.

Demonstração. Os geradores são encontrados como foi feito na Proposição 3.5. É evidente que se já conhecemos a forma explícita dos (candidatos a) geradores w_i, conhecendo a decomposição de $\left(\omega^2(S)\right)^{(8)}$ dada na Proposição 3.4, podemos verificar que eles são linearmente independentes em $\omega^2(S)$ e satisfazem as condições do Lema 1.1, e portanto realmente são geradores. Uma vez que para cada partição λ o número de geradores w_i coincide com a multiplicidade de $W_3(\lambda) \subset \omega^2(S)$ da Proposição 3.4, concluímos que todo gerador $w \in W_3(\lambda) \subset \omega^2(S)$ é uma combinação linear dos w_1's. □

Finalmente iremos verificar qual é o grau mínimo das relações de definição de C_{3d}.

Teorema 3.1. *Seja $d \geqslant 3$. A álgebra C_0 não possui nenhuma relação de definição de grau $\leqslant 6$. A estrutura de GL_d-módulo das relações de definição homogêneas de grau 7 de C_0, isto é, da componente $J^{(7)}$ em S é*

$$J^{(7)} = W_d(4,1^3) \oplus W_d(3,2^2) \oplus W_d(3,2,1^2) \oplus W_d(2^3,1) \oplus W_d(2^2,1^3) \oplus W_d(2,1^5).$$

Nas notações da Proposição 3.5, as relações de definição de C_0 que são geradores são:
Para $\lambda = (4,1^3)$:

$$12w_1 - 15w_2 - 20w_3 = 0. \tag{3.36}$$

Para $\lambda = (3,2^2)$:

$$2w_1 - w_2 + 2w_3 = 0.$$

Para $\lambda = (3,2,1^2)$:

$$-6w_1 + 10w_3 - 15w_4 + 40w_6 = 0.$$

Para $\lambda = (2^3,1)$:

$$12w_1 + w_2 = 0.$$

Para $\lambda = (3,2^2)$:

$$w_2 = 0.$$

Para $\lambda = (3,2^2)$:

$$2w_1 - 5w_2 = 0.$$

Demonstração. Como vimos na Observação 3.3 devemos procurar os geradores de $J^{(7)}$ em $W(4,1^3)$, $W(3,2^2)$, $W(3,2,1^2)$, $W(3,1^4)$, $W(2^3,1)$, $W(2^2,1^3)$ e $W(2,1^5)$. Consideremos o caso $\lambda = (4, 1^3)$. As relações $w = 0$ possíveis são combinações lineares de w_1, w_2 e w_3, logo

$$w = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 = 0, \tag{3.37}$$

e calcularemos w nas matrizes genéricas de traço nulo dadas em (2.2) da Definição 2.4. Os coeficientes dos monômios $\left(x_{11}^{(1)}\right)^4 x_{12}^{(2)} x_{22}^{(3)} x_{21}^{(4)}$ e $\left(x_{11}^{(1)}\right)^4 x_{13}^{(2)} x_{32}^{(3)} x_{21}^{(4)}$ são, respectivamente, $20\xi_1 - 8\xi_2 + 18\xi_3$ e $20\xi_1 + 12\xi_3$, então a equação (3.37) implica que

$$\begin{cases} 20\xi_1 - 8\xi_2 + 18\xi_3 = 0 \\ 20\xi_1 + 12\xi_3 = 0 \end{cases}.$$

A menos de uma constante, a solução do sistema é

$$\xi_1 = 12, \quad \xi_2 = -15, \quad \xi_3 = -20. \tag{3.38}$$

Então existe um único possível candidato para relação de definição que é um gerador de $W_d(4, 1^3)$. Se calcularmos novamente (3.37) com os valores de (3.38) obteremos que $w(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Assim a multiplicidade de $W_d(4, 1^3)$ em J é 1 e a correspondente relação é (3.36). Note que o caso $\lambda = (3, 1^4)$ não participa deste teorema, pois a multiplicidade de $W_d(3, 1^4)$ em J é 0. $\square$

Corolário 3.3. *A dimensão das relações de definição de grau 7 da álgebra C_{3d} é igual a*

$$r_7 = r_7(d) = \frac{2}{7!}(d+1)d(d-1)(d-2)(41d^3 - 86d^2 + 114d - 360).$$

Demonstração. Como vimos na Observação 3.1, a dimensão das relações de grau 7 de C_{3d} coincide com as de C_0, então pelo Teorema 3.1 e pela Proposição 1.16 segue o resultado. $\square$

Teorema 3.2. *Let $d = 3$. A estrutura de GL_d-módulo das relações de definição homogêneas da componente $J^{(8)}$ em S é*

$$J^{(8)} = W_3(4, 3, 1) \oplus 2W_3(4, 2^2) \oplus W_3(3^2, 2).$$

Nas notações da Proposição 3.6, as relações de definição que são geradores são:
Para $\lambda = (4, 3, 1)$:

$$-6w_1 - 18w_2 + 3w_3 + 3w_5 - 8w_7 = 0.$$

Para $\lambda = (4, 2^2)$: Todas as combinações lineares não triviais de

$$w_1 - 15w_2 + 3w_3 + \frac{21}{4}w_4 - \frac{5}{2}w_5 + \frac{5}{2}w_6 - 3w_7 + 2w_9 = 0,$$

$$-36w_2 + 6w_3 + \frac{27}{2}w_4 - 6w_5 + 6w_6 - 9w_7 + w_8 + 6w_9 = 0.$$

Para $\lambda = (3^2, 2)$:

$$6w_1 + 2w_2 - 3w_3 - 3w_4 = 0.$$

O número r_8 das relações de definição de grau 8 de qualquer sistema homogêneo mínimo de relações de definição da álgebra C_{33} é igual a 30.

Demonstração. A decomposição de $J^{(8)}$ está feita no Corolário 3.2. A forma explícita dos geradores é obtida como na demonstração do Teorema 3.1. Note que

$$\dim\left(W_3(4,3,1)\right) = \left(\frac{4-3+2-1}{2-1}\right)\left(\frac{4-1+3-1}{3-1}\right)\left(\frac{3-1+3-2}{3-2}\right) = 2\frac{5}{2}3 = 15,$$

$$\dim\left(W_3(4,2^2)\right) = \left(\frac{4-2+2-1}{2-1}\right)\left(\frac{4-2+3-1}{3-1}\right)\left(\frac{2-2+3-2}{3-2}\right) = 3\frac{4}{2}1 = 6,$$

$$\dim\left(W_3(3^2,2)\right) = \left(\frac{3-3+2-1}{2-1}\right)\left(\frac{3-2+3-1}{3-1}\right)\left(\frac{3-2+3-2}{3-2}\right) = 1\frac{3}{2}2 = 3.$$

Então

$$\begin{gathered} dim\left(J^{(8)}\right) = dim\left(W_3(4,3,1) \oplus 2W_3(4,2^2) \oplus W_3(3^2,2)\right) = dim\left(W_3(4,3,1)\right) \\ +2dim\left(W_3(4,2^2)\right) + dim\left(W_3(3^2,2)\right) = 15+12+3 = 30 \end{gathered}$$

□

Observação 3.4. *Usando o Lema 1.2 podemos encontrar uma base explícita do conjunto das relações de definição de grau* 7 *para* C_0*,* $d \geqslant 3$*, e de grau* 8 *para* C_0*,* $d = 3$*.*

Referências

[1] S. Abeasis and M. Pittaluga. On a minimal set of generators for the invariants of 3× 3 matrices. *Communications in Algebra*, 17(2):487–499, 1989.

[2] G. Almkvist, W. Dicks, and E. Formanek. Hilbert series of fixed free algebras and noncommutative classical invariant theory. *Journal of Algebra*, 93(1):189–214, 1985.

[3] F. Benanti and V. Drensky. Defining relations of the noncommutative trace algebra of two 3×3 matrices. *Adv. in Appl. Math.*, 37(2):162–182, 2006.

[4] F. Benanti and V. Drensky. Defining relations of minimal degree of the trace algebra of 3× 3 matrices. *Journal of Algebra*, 320(2):756–782, 2008.

[5] A. Berele and J. R. Stembridge. Denominators for the poincaré series of invariants of small matrices. *Israel Journal of Mathematics*, 114(1):157–175, 1999.

[6] C. De Concini, D. Eisenbud, and C. Procesi. Young diagrams and determinantal varieties. *Inventiones mathematicae*, 56(2):129–165, 1980.

[7] V. Drensky. Computing with matrix invariants. *arXiv preprint math/0506614*, 2005.

[8] V. Drensky and E. Formanek. *Polynomial identity rings*. Birkhäuser, 2012.

[9] V. S. Drensky. *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*. Springer Verlag, 2000.

[10] E. Formanek. The polynomial identities and invariants of nxn matrices. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1991.

[11] E. Formanek. The ring of generic matrices. *Journal of Algebra*, 258(1):310–320, 2002.

[12] A. Garcia and Y. Lequain. Elementos de algebra (6o ediçao). *Rio de Janeiro: Associaçao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA*, 2013.

[13] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods*, volume 122 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[14] P. E. Koshlukov. Polynomial identities for a family of simple Jordan algebras. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 39(9):15–17, 1986.

[15] A. Papantonopoulou. *Algebra: pure & applied*. Pearson College Division, 2002.

[16] C. Procesi. Non-commutative affine rings. *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I (8)*, 8:237–255, 1967.

[17] B. E. Sagan. The symmetric group, volume 203 of graduate texts in mathematics, 2001.

[18] P. Suetin, A. I. Kostrikin, and Y. I. Manin. *Linear algebra and geometry*, volume 1. CRC Press, 1997.